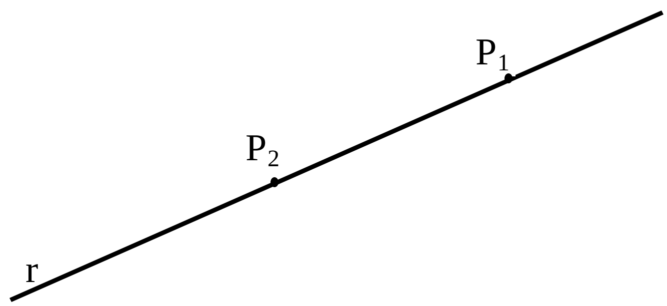
CAPÍTULO I – EQUAÇÕES DA RETA

1.1 Equação vetorial

Um dos axiomas da geometria euclidiana diz que dois pontos distintos determinam uma reta. Seja r a reta determinada pelos pontos P_1 e P_2.

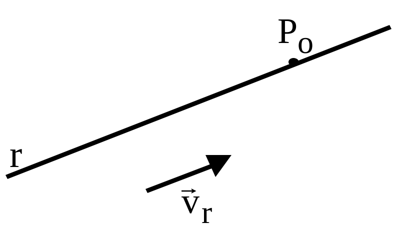


Um ponto P pertence à reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são colineares. Como P_1 e P_2 são distintos, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é não nulo, então existe um escalar λ tal que $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2}$. Assim, P pertence a r se, e somente se, $P = P_1 + \lambda\overrightarrow{P_1P_2};\ \ \lambda \in IR$. Podemos então concluir que todo ponto da reta r satisfaz à equação:

$$\mathbf{X = P_1 + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2};\quad \lambda \in IR},$$

que é chamada de **equação vetorial** da reta r.

Observemos que o fundamental na determinação da equação vetorial de uma reta, é conhecermos um ponto desta reta e um vetor (não nulo) na sua direção. Um vetor na direção da reta r é chamado vetor direção da reta r, e indicado por $\vec{v}_r$.



$r : X = P_o + h\vec{v}_r;\ h \in IR$

Assim, cada escalar h determina um único ponto P pertencente a r e, reciprocamente, para cada ponto de r, existe um único valor real h tal que $P = P_o + h\,\vec{v}_r$.

1.2 Equações paramétricas e simétricas

Fixado um sistema de coordenadas, sejam $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $\vec{v}_r = (a, b, c)$. A equação vetorial da reta r, determinada por P_o e $\vec{v}_r$ é:

$$r : (x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + h\,(a, b, c);\ h \in IR\ ,$$

que equivale ao sistema $r : \begin{cases} x = x_o + h\,a \\ y = y_o + h\,b \ ;h \in IR \\ z = z_o + h\,c \end{cases}$ ①

As equações acima são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Se $abc \neq 0$, eliminando o parâmetro h do sistema ①, obtemos

$$\mathbf{r : \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}} \quad ②$$

Estas equações são denominadas **equações simétricas** da reta r.
As equações em ②, poderiam ser obtidas observando o paralelismo que deve existir entre os vetores:

$$\overrightarrow{P_oP} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \text{ e } \vec{v}_r = (a, b, c), \quad abc \neq 0.$$

Exemplos

1. Determine uma equação da reta r que:

a) passa pelos pontos $P_1(3,-1,1)$ e $P_2(2,1,2)$;

b) passa pelo ponto P(4,1,0) e contém representantes do vetor $\vec{u} = (2,6,-2)$.

Solução:

a) Como P_1 e P_2 são distintos, determinam uma reta de equação vetorial

$X = P_1 + h\,\overrightarrow{P_1P_2};\ h \in IR$, isto é, $r : (x, y, z) = (3,-1,1) + h\,(-1,2,1);\ h \in R$.

b) $r: x-4=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ (equações simétricas da reta).

2. Verifique se o ponto $P(-1,0,2)$ pertence às retas:

a) $r:(x,y,z)=(-7,-3,-7)+h\,(2,1,3);\ h\in IR$

b) $s:\begin{cases} x=-3+h \\ y=-1+h\ ;h\in IR \\ z=2h \end{cases}$

c) $t:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{2}$

Solução:

a) $P\in r$ se, e somente, existe $h_o \in IR$ tal que:

$$(-1,0,2)=(-7,-3,-7)+h_o\,(2,1,3).$$

Ou seja, $(6,3,9)=h_o(2,1,3)$. É fácil verificar que $h_o = 3$ torna a igualdade acima verdadeira, logo $P\in r$.

b) $P\in s$ se, e somente, existe $h_o \in IR$ tal que $\begin{cases} -1=-3-h_o \\ 0=-1+h_o \\ 2=2h_o \end{cases}$
o que é impossível, pois, da primeira equação temos $h_o = -2$ e da segunda $h_o = 1$. Logo, $P\notin s$.

c) $P\in t$ se, e somente, $\dfrac{-1+1}{2}=\dfrac{0}{3}=\dfrac{2-4}{2}$. Como $0\neq -1$ temos que $P\notin t$.

3. Seja $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=z$. Determine uma equação de r nas formas vetorial e paramétrica.

Solução:

Das equações simétricas de r temos $\vec{v}_r = (2,4,1)$ e $P(1,-2,0)$ é um ponto da reta r. Assim, $(x, y, z) = (1,-2,0) + h\,(2,4,1);\ h \in IR$ e

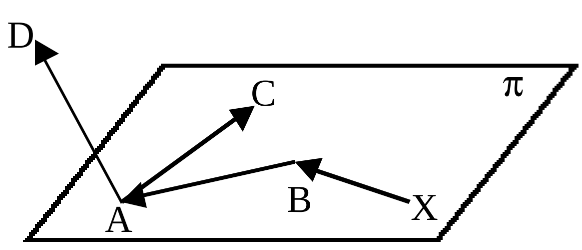
$$\begin{cases} x = 1 + 2\,h \\ y = -2 + 4\,h\,;\, h \in IR \\ z = h \end{cases}$$

, são equações da reta r nas formas vetorial e paramétrica, respectivamente.

CAPÍTULO II - EQUAÇÕES DO PLANO

2.1 Equação Vetorial

Um dos axiomas da Geometria Espacial nos diz que três pontos não colineares determinam um plano. Consideremos então π o plano determinado pelos pontos A, B e C. Desejamos encontrar uma condição necessária e suficiente para que um ponto X pertença ao plano π. Observemos então que, como A, B e C são não colineares, os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes com representantes em π. Portanto, um ponto X pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{XB}$ é coplanar com os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Assim, existem escalares t e h tais que $\overrightarrow{XB} = t\,\overrightarrow{BA} + h\,\overrightarrow{AC}$.

Daí, um ponto X pertence ao plano π se, e somente se,

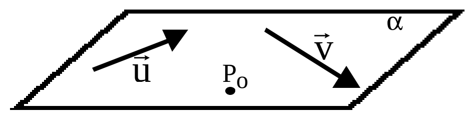
$$X = B + t\,\overrightarrow{BA} + h\,\overrightarrow{AC}\,;\ t, h \in IR\,.$$

Esta equação é chamada de **equação vetorial do plano p.**

Observemos que o fundamental na determinação da equação de um plano é conhecermos um ponto deste plano e dois vetores linearmente independentes, com representantes no mesmo. Um vetor com representante em um plano é dito **paralelo** ao plano.

Assim, uma equação vetorial de um plano α paralelo aos vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que passa por P_o é :

$$X = P_o + t\vec{u} + h\vec{v};\ \ t, h \in IR .$$



Observemos ainda que para cada ponto X do plano, existe um único par ordenado (t, h) satisfazendo a esta equação e reciprocamente.

2. 2 Equações Paramétricas

Fixemos um sistema de coordenadas do espaço. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores linearmente independentes paralelos ao plano α e $P_o(x_o, y_o, z_o)$ um ponto de α . Assim, uma equação vetorial do plano α pode ser escrita como:

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2)\ ,\ \ t, h \in IR .$$

A equação acima equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t + a_2 h \\ y = y_o + b_1 t + b_2 h\ ; \quad t, h \in IR . \\ z = z_o + c_1 t + c_2 h \end{cases}$$

As equações deste sistema são chamadas **equações paramétricas do plano α .**

Exemplos

1. Dê uma equação vetorial do plano determinado pelos pontos $A = (1,1,0)$, $B = (-1,2,1)$ e $C = (3,2,1)$.

Solução:

Como os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2,1,1)$ e $\overrightarrow{CA} = (-2,-1,-1)$ são linearmente independentes, os pontos A, B e C não são colineares, logo determinam um único plano. Uma equação vetorial do plano ABC é :

$$(x, y, z) = (1,1,0) + t(-2,1,1) + h(2,1,1) \ ; \quad t, h \in IR$$

2. Dê as equações paramétricas do plano paralelo aos vetores $\vec{u} = (-1,2,1)$, $\vec{v} = (1,0,3)$ e que passa pelo ponto $P = (2,4,-1)$.

Solução:

Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes então P, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam um plano de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - t + h \\ y = 4 + 2t \qquad ; \qquad t,\ h \in IR \\ z = -1 + t + 3h \end{cases}$$

3. Dê uma equação vetorial do plano β, dado a seguir;

$$\beta : \begin{cases} x = 1 + 2h - t \\ y = -2 + h + 3t \quad ; \qquad t, h \in IR \\ z = 3 + 5h \end{cases}$$

Solução:

Das equações paramétricas de β temos que $P = (1,-2,3)$ é um ponto de β e os vetores $\vec{u} = (2,1,5)$ e $\vec{v} = (-1,3,0)$ são linearmente independentes com representantes em β. Assim, uma equação vetorial de β é dada por ;

$$\beta: \ (x, y, z) = (1,-2,3) + t(2,1,5) + h(-1,3,0) \ ; \quad t, h \in IR .$$

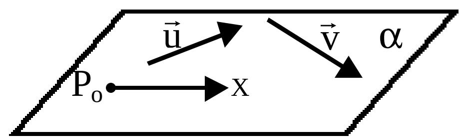
4. Determine as equações paramétricas do plano α paralelo ao vetor $\vec{u} = (5,1,2)$ e que passa pelos pontos $A = (3,-1,1)$ e $B = (2,-1,0)$.

Solução:

Observemos que os vetores $\vec{u} = (5,1,2)$ e $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-1)$ são linearmente independentes com representantes no plano α. Assim, as equações paramétricas de α são:

$$\alpha : \begin{cases} x = 3 + 5h - t \\ y = -1 + h \\ z = 1 + 2h - t \end{cases} \quad ; \; t, h \in IR.$$

2. 3 Equação Geral



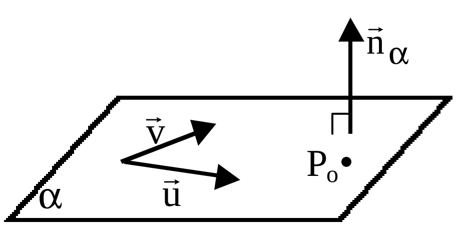
Seja α o plano determinado pelo ponto $P(x_o, y_o, z_o)$ e pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Lembremos que um ponto X(x, y, z) pertence a α se, somente se, os vetores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Assim, $[\overrightarrow{PX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$, ou seja, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{P_o X} = 0$. Considerando $\vec{u} \times \vec{v} = (a, b, c)$, podemos escrever:

$$(a, b, c) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$ax + by + cz + d = 0 \quad , \qquad ①$$

onde $d = -(ax_o + by_o + cz_o)$. A equação ① é chamada de **equação geral do plano α.**



Dizemos que um vetor não nulo é **normal** a um plano se, somente se, é ortogonal a todos os vetores que possuem representantes neste plano. É usual indicarmos um vetor normal ao plano α por $\vec{n}_\alpha$.

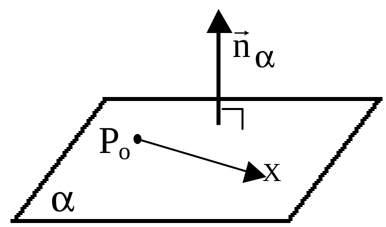
Observemos que os coeficientes **a**, **b** e **c** da equação geral do plano α correspondem às coordenadas de um vetor normal a este plano.

Exemplos

1. Determine uma equação geral do plano α que passa pelo ponto $P=(3,-1,2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(-1,1,2)$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$.

Solução 1:
Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e têm representantes em α, podemos considerar $\vec{n}_\alpha$ paralelo ao produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}=(2,2,0)$. Considerando $\vec{n}_\alpha=(2,2,0)$, uma equação geral do plano α tem a forma $2x+2y+d=0$, para um certo valor real de d. Como o ponto P pertence ao plano α suas coordenadas satisfazem a esta equação, assim temos: $2.3+2.(-1)+0.2+d=0$, daí, $d=-4$. Logo, $2x+2y-4=0$ é uma equação do plano α.

Solução 2:
Seja $\vec{n}_\alpha=(1,1,0)$ e X um ponto genérico de α.



Então, $\overrightarrow{P_oX}\cdot\vec{n}_\alpha=0$, ou equivalentemente,

$$(x-3,y+1,z-2)\cdot(1,1,0)=0\,.$$

Daí, uma equação geral do plano α é $x+y-2=0$.

2. Determine um vetor normal ao plano α nos seguintes casos:

a) $\alpha:\ X=(1,0,1)+t(2,-1,3)+h(1,1,0)\,;\ t,h\in IR\,.$

b) $\alpha:\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+2t-h\,; \quad t\,,h\in IR\,.\\ z=-t+2h\end{cases}$

c) $\alpha:\ 2x-3y+z-1=0$

Solução :

a) $\vec{n}_\alpha=(2,-1,3)\times(1,1,0)=(-3,3,3)$

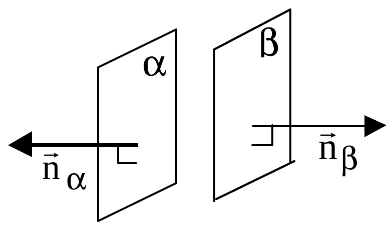
b) $\vec{n}_\alpha=(3,2,-1)\times(0,-1,2)=(3,-6,-3)$

c) $\vec{n}_\alpha=(2,-3,1)$

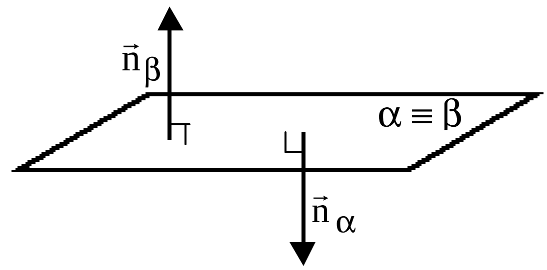
CAPÍTULO III - POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

No espaço IR^3, dois planos α e β são paralelos ou concorrentes. Se os planos α e β são paralelos temos:

Paralelos distintos : $\alpha \cap \beta = \phi$



Paralelos coincidentes : $\alpha \equiv \beta$



Observemos que dois planos são paralelos se, somente se , seus vetores normais são paralelos. Consideremos $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Temos que α e β são paralelos se, somente se, existe um real k tal que:

$$\begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \\ c_1 = kc_2 \end{cases}$$

Se os planos α e β são paralelos e, além disso, possuem um ponto em comum, então eles são coincidentes. Suponhamos que $P(x_1, y_1, z_1)$ seja esse ponto comum. Assim, as coordenadas de P satisfazem às equações de α e β :

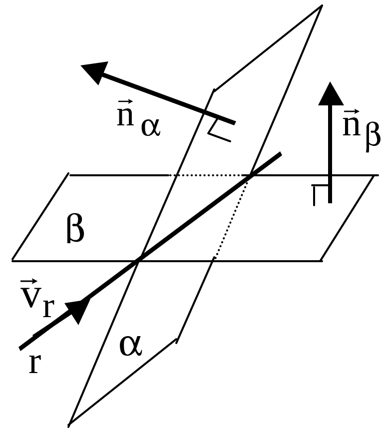
$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} ka_2x_1 + kb_2y_1 + kc_2z_1 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Daí, $d_1 = k(-a_2x_1 - b_2y_1 - c_2z_1)$. Logo, $d_1 = kd_2$.

Se os vetores normais dos planos α e β não são paralelos, então estes planos são concorrentes. Neste caso, eles se interceptam segundo uma reta r. Assim, um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, somente se, suas coordenadas satisfazem ao sistema:

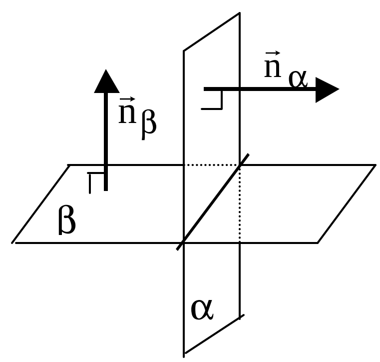


$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema é denominado **equação geral da reta r.**

Observemos que um vetor direção da reta r ,$\vec{v}_r$, possui representantes nos planos α e β. Daí, $\vec{v}_r$ é ortogonal a $\vec{n}_\alpha$ e ortogonal a $\vec{n}_\beta$. Podemos concluir então que $\vec{v}_r$ é paralelo ao vetor $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

Se os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são ortogonais dizemos que os planos α e β são perpendiculares. Assim, dois planos são perpendiculares se, somente se, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$.



Exemplos

1. Estude a posição relativa dos planos:

a) $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ e $\beta: 4x + 2y - 2z + 2 = 0$.

b) $\alpha:\ X = (1,0,1) + t(2,1,3) + h(0,0,1)$; $t, h \in IR$
e $\beta: 2x + y - z + 1 = 0$.

c) $\alpha:\ X = (1,0,1) + t(2,1,3) + h(0,0,1)$; $t, h \in IR$

e $\beta: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 2t\ ; \quad t, h \in IR \\ z = 2 + 5t - h \end{cases}$

Solução :

a) Observemos que $\vec{n}_\alpha = 2\,\vec{n}_\beta$, assim, os planos α e β são paralelos. Além disso, temos que $d_1 = 2d_2$. Logo, podemos concluir que α e β são coincidentes.

b) Consideremos os vetores $\vec{n}_\alpha = (2,1,3)\times(0,0,1) = (1,-2,0)$ $\vec{n}_\beta = (2,1,-1)$. Como estes vetores não são paralelos, temos que os planos α e β são concorrentes. Se r é a reta interseção de α e β, então a equação geral de r pode ser dada pelo sistema:

$$r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Observemos ainda que $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$, assim α e β são perpendiculares.

c) Consideremos os vetores $\vec{n}_\alpha = (1,-2,0)$ e $\vec{n}_\beta = (-2,4,0)$. Observemos que $\vec{n}_\alpha = -2\,\vec{n}_\beta$, daí, os planos α e β são paralelos. No entanto, $P = (1,0,1)$ pertence ao plano α e não pertence ao plano β. Consequentemente, α e β são estritamente paralelos.

2. Determine uma equação do plano β paralelo a $\alpha : 2x - 6y + 4z - 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (1,0,-2)$.

Solução :

Como o plano β é paralelo ao plano α, temos que $\vec{n}_\beta = k\,\vec{n}_\alpha$, $k \neq 0$. Podemos então considerar $\vec{n}_\beta = (-2,-6,4)$. Assim, podemos escrever: $\beta : 2x - 6y + 4z + d = 0$. Para determinarmos o valor de d basta utilizarmos o fato de que o ponto P pertence a β e por isso, satisfaz a sua equação. Daí, $2.1 - 6.0 + 4.(-2) + d = 0$, ou seja, d = 6. Logo, uma equação geral de β é $2x - 6y + 4z + 6 = 0$.

3. Dados os planos $\alpha : 2x + 4y - z + 1 = 0$ e $\beta : -x + 2y + z + 2 = 0$ determine uma equação vetorial da reta r interseção dos planos α e β.

Solução :

É fácil obtermos uma equação vetorial de uma reta se conhecemos dois de seus pontos. Ora, uma equação geral da reta r pode ser dada pelo sistema:

$$r:\begin{cases}2x+4y-z+1=0\\-x+2y+z+2=0\end{cases} \qquad ①$$

Assim, basta conseguirmos dois pontos cujas coordenadas satisfaçam a este sistema. Como este sistema é possível e indeterminado, podemos conseguir uma solução considerando $y=0$. Então,

$$\begin{cases}2x-z+1=0\\-x+z+2=0\end{cases}$$

Daí, $x=-3$, $z=-5$ e $P(-3,0,-5)$ pertence à reta r. De modo análogo, se considerarmos $x=0$ no sistema ①, obteremos $y=-\frac{1}{2}$, $z=-1$ e $Q=(0,-\frac{1}{2},-1)$ pertence à reta r. Daí, o vetor $\vec{v}_r=\overrightarrow{PQ}=(3,-\frac{1}{2},4)$ é um vetor direção da reta r e uma equação vetorial desta reta pode ser dada pela equação:

$$r:(x,y,z)=(-3,0,-5)+h\,(3,-\frac{1}{2},4);\ h\in R.$$

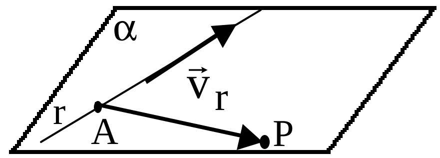
Uma outra maneira de determinarmos um vetor direção da reta r é obtida quando utilizamos o fato de que este vetor é paralelo ao vetor $\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$. Assim, podemos considerar $\vec{v}_r=(2,4,-1)\times(-1,2,1)=(6,-1,8)$ e $r:(x,y,z)=(-3,0,-5)+h\,(6,-1,8);\ h\in IR$ é uma equação outra vetorial de r.

4. Dada a reta $r:(x,y,z)=(1,-2,0)+h\,(2,4,1);\ h\in IR$, determine uma equação geral da mesma.

Solução :
Devemos determinar as equações gerais de dois planos distintos α e β que contém a reta r.

Observemos que se um ponto não pertence a uma reta, o plano determinado por este ponto e esta reta, naturalmente, contém a reta.

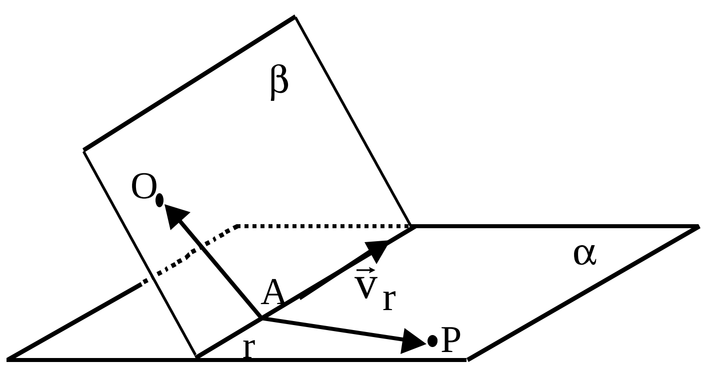
Assim, seja α o plano determinado pela reta r e pelo ponto $P(0,0,-1)$. O vetor normal de α pode ser dado por $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}$, onde A é um ponto de r.



Então, considerando A(1,–2,0) temos que $\vec{n}_\alpha = (-6,1,8)$ e $\alpha: -6x + y + 8z + d = 0$.
Para determinarmos o valor de d, substituimos na equação anterior as cooordenadas de um ponto qualquer de α. Por exemplo, substituindo as coordenadas do ponto P, obtemos : $-6.0 + 0 + 8.(-1) + d = 0$. Daí, $d = 8$ e $\alpha: -6x + y + 8z + 8 = 0$.

A equação geral do plano β é obtida de modo análogo ao utilizado para obtenção da equação do plano α. Chamamos porém a atenção especial para a escolha do ponto: **agora ele deve ser escolhido fora do plano α.**

Considerando o plano β determinado pela reta r e pelo ponto O(0,0,0) temos que:



$\vec{n}_\beta = \vec{v}_r \times \overrightarrow{AO} = (-2,-1,8)$

e $\beta: -2x - y + 8z + d = 0$.

Como o plano β passa pela origem do sistema de coordenadas temos que $d = 0$.

Logo, $\beta: -2x - y + 8z = 0$, portanto uma equação geral da reta r é

$$r: \begin{cases} -6x + y + 8z + 8 = 0 \\ -2x - y + 8z = 0 \end{cases}$$