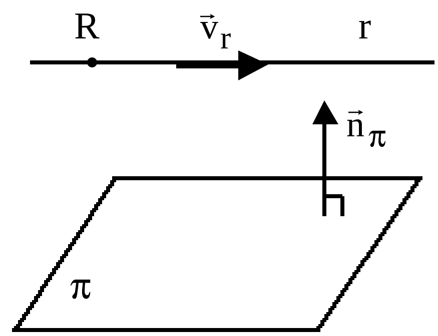
CAPÍTULO IV - POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO E DE DUAS RETAS

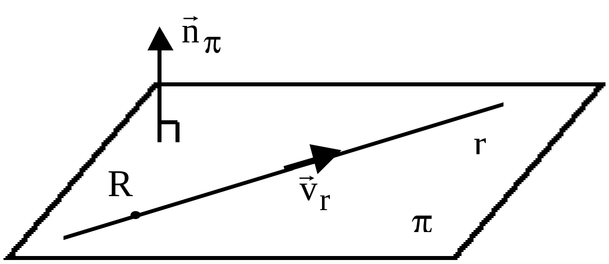
4.1 Posições relativas de uma reta e um plano

As posições de uma reta $r: X = R + t\,\vec{v}_r,\ \ t \in IR$ e um plano π são:

a) r paralela a π
($r \,//\, \pi$)



$r \,//\, \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R \notin \pi$

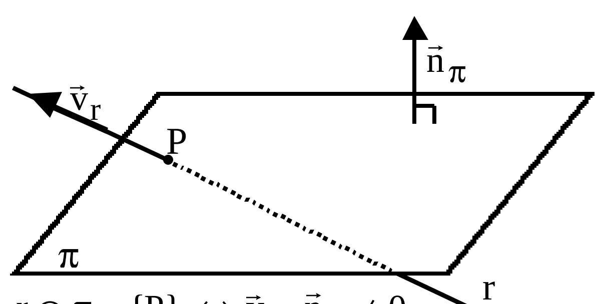


b) r contida em π ($r \subset \pi$)

$r \subset \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R \in \pi$

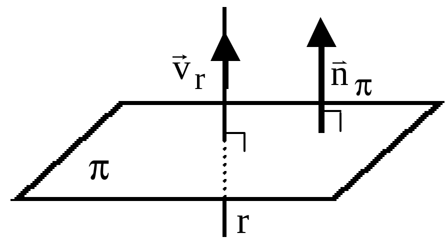
c) r e π concorrentes

($r \cap \pi = \{P\}$)



$r \cap \pi = \{P\} \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$

Caso particular:



Exemplos:

1. Determine a interseção da reta r com o plano π, nos seguintes casos:

a) $r: \ X = (1,6,2) + t\,(1,1,1)\,;\, t \in IR$

$\pi: x - z - 3 = 0$

b) $r: \ x - 1 = y - 2 = 2\,(z - 1)$

$\pi: X = h(6,2,1) + t\,(1,2,1);\ \ t, h \in IR$

c) $r: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 3\,t\,;\, t \in IR \\ z = -t \end{cases}$

$\pi: x + y + 2z - 1 = 0$

Solução:

a) $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,1) \cdot (1,0,-1) = 0$, logo, $r \cap \pi = r$ ou $r \cap \pi = \phi$.
Como R(1,6,2) é um ponto de r, verificamos que $R \notin \pi$. Logo $r \cap \pi = \phi$.

b) Sendo $\vec{v}_r = \left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ e $\vec{n}_\pi = (6,2,1) \times (1,2,1) = (0,-5,10)$, temos que $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Logo, $r \cap \pi = r$ ou $r \cap \pi = \phi$. Como R(1,2,1) é um ponto de r, verificamos que $R \in \pi$. Logo $r \subset \pi$ e consequentemente $r \cap \pi = r$.

b) De $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,3,-1)\cdot(1,1,2) = 2 \neq 0$ concluímos que r e π são concorrentes. Seja $r \cap \pi = \{P\} = \{(a,b,c)\}$. Temos então:

(1) $a + b + 2c - 1 = 0.$ (2) $\begin{cases} a = t \\ b = -3 + 3t, \\ c = -t \end{cases}$ para algum escalar t.

De (1) e (2) obtemos $t = 2$ e $P(2,3,-2)$.

2. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto $A(1,0,-2)$ e é paralela aos planos $\alpha: 2x - y + 2 = 0$ e $\beta: x + z - 3 = 0$.

Solução:

Como $r // \alpha$ e $r // \beta$, temos $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\alpha$ e $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\beta$. Sendo $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ LI, temos que $\vec{v}_r // \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$. Assim podemos considerar

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (1,01)\times(2,-1,0) = (1,2,-1).$$

Daí uma equação vetorial da reta r é:

$$r: X = (1,0,-2) + t\,(1,2,-1);\ t \in IR$$

4.2 Posições relativas de duas retas

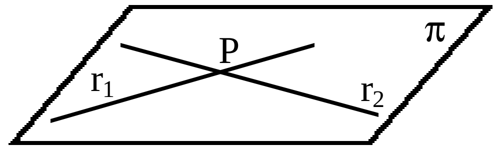
Se duas retas estão contidas no mesmo plano dizemos que são **coplanares**. Caso contrário são denominadas **reversas.**

As retas coplanares podem ser paralelas (distintas ou coincidentes) ou concorrentes.

Resumindo, duas retas r_1 e r_2 podem ser:

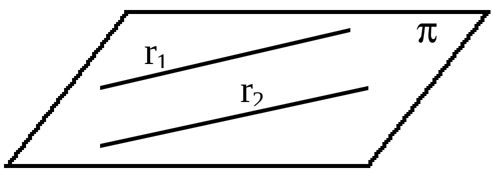
Coplanares

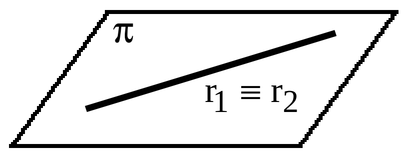
- Concorrentes : $r_1 \cap r_2 = \{P\}$



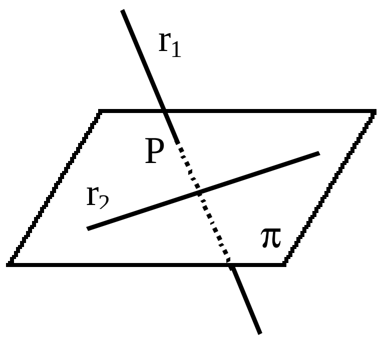
- Paralelas:

  - Distintas : $r_1 \cap r_2 = \phi$
  - Coincidentes : $r_1 \equiv r_2$





Reversas



Estabeleceremos a seguir condições para a identificação da posição relativa de duas retas.

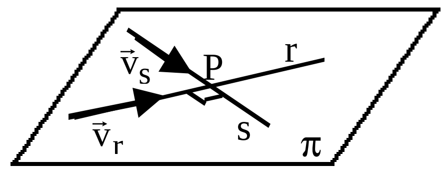
Considere as retas $r: X = R + h\,\vec{v}_r$ e $s: X = S + t\,\vec{v}_s$; $h, t \in IR$.

Se r e s são coplanares então os vetores $\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são coplanares e portanto $[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$. Reciprocamente, se $[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$ podemos ter:

i) $\vec{v}_r \,//\, \vec{v}_s$, nesse caso r e s são paralelas, logo coplanares.

ii) $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ LI, nesse caso $\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são LD. Como $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são linearmente independentes, então podemos escrever $\overrightarrow{RS}$ como combinação linear de $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Logo, existem escalares h_o e t_o tais que $S = R + h_o\vec{v}_r + t_o\vec{v}_s$. Assim, o plano $\beta: X = R + h\,\vec{v}_r + t\,\vec{v}_s;\ h, t \in IR$, contém as retas r e s, que portanto são coplanares. Observemos ainda que, neste caso as retas são concorrentes.

Um caso particular de retas concorrentes são as retas perpendiculares. Observemos que se duas retas r e s são perpendiculares então $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$.



Exemplos

1. Estude a posição relativa dos seguintes pares de retas:

a) $r: \begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s: X = (1,0,2) + h\,(1,-3,7);\ h \in IR$

b) $r: \begin{cases} x = h \\ y = 1 - h \\ z = 4 + 4h \end{cases};\ h \in IR$ e $s: \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 8$

c) $r: X = (-2,1,3) + t(-10,-2,-18)\,;\ t \in IR$ e $s: \dfrac{x-3}{5} = y - 2 = \dfrac{z-12}{9}$

d) $r: X = (4,-3,1) + h(0,2,1);\ h \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases};\ t \in IR$

Solução:

a) Como $\vec{v}_r \,//\, (2,-1,-1) \times (1,3,-1) = (4,1,7)$ e $\vec{v}_s \,//\, (1,-3,7)$ temos que as retas r e s são concorrentes ou reversas. Vamos então considerar R(0,0,2) e S(1,0,2) pontos de r e s, respectivamente. Assim,

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 28 \neq 0 .$$

Portanto, as retas r e s são reversas.

c) Como $\vec{v}_r \,//\, (1,-1,4)$ e $\vec{v}_s \,//\, (-2,3,1)$ temos que as retas r e s são concorrentes ou reversas. Vamos então considerar R(0,1,4) e S(1,0,8) pontos de r e s, respectivamente.

Assim,

$[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Logo as retas r e s são concorrentes.

c) Como $\vec{v}_r \,//\, (-10,-2,-18)$ e $\vec{v}_s \,//\, (5,1,9)$ temos que as retas r e s são paralelas (distintas ou coincidentes). Além disso, o ponto $R(-2,1,3)$ pertence às retas r e s. Assim, podemos concluir que as retas r e s são coincidentes.

d) Como $\vec{v}_r \,//\, (0,2,1)$ e $\vec{v}_s \,//\, (0,-2,-1)$ temos que as retas r e s são paralelas (distintas ou coincidentes). Observemos que o ponto $R(4,-3,1)$ pertence à reta r, no entanto não pertence à reta s, pois o sistema

$$\begin{cases} 4 = 4 \\ -3 = -1 - 2\,t_o \\ 1 = 3 - t_o \end{cases}$$ não tem solução.

Assim, podemos concluir que as retas r e s são paralelas distintas.

2. Dê uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1,1,1)$ e é paralela à reta s: $\begin{cases} 2x - y + 4z + 3 = 0 \\ x + 5y - z + 6 = 0 \end{cases}$.

Solução:

Sendo r e s retas paralelas podemos considerar $\vec{v}_r = \vec{v}_s$. Como $\vec{v}_s \,//\, (2,-1,4)\times(1,5,-1) = (-19,6,11)$ as equações simétricas de s são:

$$\frac{x+1}{-19} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{11}.$$

3. Mostre que as retas $r: x-2 = -y = z-1$ e $s: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -2-t;\ t \in IR \\ z = 3 \end{cases}$

são concorrentes e determine o ponto de interseção.

Solução:

Sejam $\vec{v}_r = (1,-1,1)$, $\vec{v}_s = (1,-1,0)$ e $R(2,0,1)$ e $S(4,-2,3)$ pontos de r e s,

respectivamente. Então $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ e assim concluímos

que r e s são coplanares. Como não são paralelas pois $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são vetores LI, temos que as retas são concorrentes. Seja $\{P_o\} = \{(x_o, y_o, z_o)\} = r \cap s$.

Então, $x_o - 2 = -y_o = z_o - 1$ e $\begin{cases} x_o = 4 + t_o \\ y_o = -2 - t_o \\ z_o = 3 \end{cases}$.

Daí, $t_o = 0$ e $P_o = (4,-2,3)$.

4. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto P (1,2,3), é concorrente com a reta $s: X = (-1,3,5) + h\,(2,5,1);\ h \in IR$, e tem vetor direção $\vec{v}_r$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (0,1,-4)$.

Solução:

Seja $\{P_o\} = r \cap s$. Então existe um real h_o, tal que $P_o(-1+2h_o, 3+5h_o, 5+h_o)$. Consideremos $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o}$. Como $\vec{v}_r$ é ortogonal a $\vec{u}$, temos que $(-2+2h_o, 1+5h_o, 2+h_o)\cdot(0,1,-4) = 0$. Logo, $h_o = 7$. Assim,

$$P_o = (13,18,12) \quad \text{e} \quad r : X = (1,2,3) + t\,(2,5,1);\ t \in IR.$$

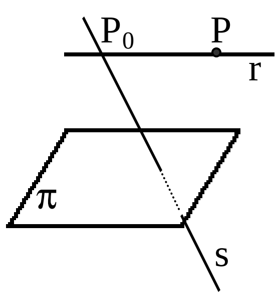
5. Determine uma condição necessária e suficiente para que uma reta r seja paralela ao eixo OX.

Solução:

O eixo OX tem vetor direção $\vec{i} = (1,0,0)$. Então, uma reta r é paralela ao eixo OX se, e somente se, $\vec{v}_r$ é paralelo ao vetor $\vec{i} = (1,0,0)$.

6. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P = (1,0,2)$, é concorrente com a reta $s : X = (1,0,1) + t\,(2,1,1); t \in IR$ e é paralela ao plano $\pi : 2x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Solução:



Seja $\{P_o\} = r \cap s$ então, existe $t \in IR$ tal que $P_o = (1+2t, t, 1+t)$ e $\overrightarrow{PP_o} = (2t, t, t-1)$.

Como r // π temos $(2t, t, t-1)\cdot(2,-3,4) = 0$. Assim, $t = \dfrac{4}{5}$.

Considerando $\vec{v}_r = (8,4,-1)$, uma equação vetorial de r é:

$$r : X = (1,0,2) + t\,(8,4,-1); t \in IR.$$