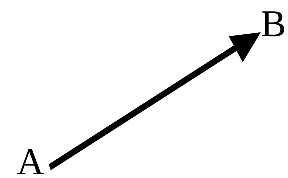
CAPÍTULO VI - DISTÂNCIA

6.1 Distância entre dois pontos



A distância entre um ponto A e um ponto B é indicada por d(A,B) e definida por $|\overrightarrow{AB}|$.

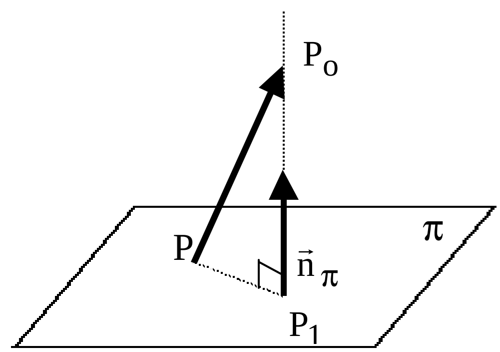
Considerando $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ temos que:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| \ .$$

Daí, $$\mathbf{d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

6.2 Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto P_o e um plano π é indicada por $d(P_o, \pi)$ e definida como a menor entre as distâncias de P_o a pontos de π.



Assim, se P é um ponto qualquer de π, então a distância entre P_o e π é o módulo da projeção do vetor $\overrightarrow{PP_o}$, na direção de $\vec{n}_\pi$.

Considerando $\pi: ax + by + cz + d = 0$ $P_o(x_o, y_o, x_o)$ e P(x, y, z) então:

$$d(P_o, \pi) = |\overrightarrow{PP_o} \cdot \overset{\circ}{\vec{n}}_\pi| = \frac{|a(x_o - x) + b(y_o - y) + c(z_o - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Logo, $$\mathbf{d(P_o, p)| = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}.$$

Exemplos:

Determine a distância entre o ponto P_o e o plano π nos seguintes casos:

a) $P_o(1,1,2)$ e $\pi: 2x - y + 2z + 4 = 0$

b) $P_o(2,2,4)$ e $\pi: X = (1,0,1) + h(1,1,1) + t(1,2,3)$; $h, t \in IR$.

Solução:

a) $d(P_o, \pi) = \dfrac{|2.1 - 1.1 + 2.2 + 4|}{\sqrt{9}} = 3$

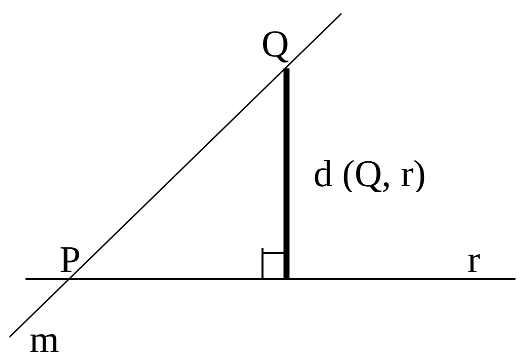
b) Consideremos $P(1,0,1)$ e $\vec{n}_\pi = (1,1,1) \times (1,2,3) = (1,-2,1)$.

Assim,

$$d(P_o, \pi) = |\overrightarrow{PP_o} \cdot \overset{\circ}{\vec{n}}_\pi| = \frac{|1.1 + (-2).2 + 1.3|}{\sqrt{6}} = 0.$$

6.3 Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto Q e uma reta r é indicada por d(Q, r) e definida como a menor entre as distâncias de Q a pontos de r.

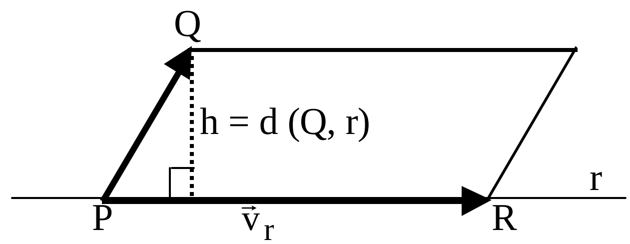


Assim, se $P \in r$ e m é a reta definida pelos pontos P e Q, temos que :

$$d(Q,r) = |\overrightarrow{PQ}|.\operatorname{sen}(r,m) = |\overrightarrow{PQ}| \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r|}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{v}_r|} .$$

Logo, $$\mathbf{d(Q,r)} = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}|}{|\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}|}.$$

Utilizando a interpretação geométrica do produto vetorial, podemos observar que d(Q,r) é a altura do paralelogramo, cujos lados são representantes dos vetores $\vec{v}_r$ e $\overrightarrow{PQ}$, em relação à base PR, sendo $R = P + \vec{v}_r$.



Exemplos:

Determine d(Q,r) nos seguintes casos:

a) Q(1,1,0) e $r:\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$; $t \in IR$

b) Q(1,2,3) e $r:\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

Solução:

a) Sejam P(2,0,1) e $\vec{v}_r = (1,2,-1)$.
Então,

$$d(Q,r) = \frac{|(-1,1,-1)\times(1,2,-1)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

b) Sejam $P(0,-7,-4)$ e $\vec{v}_r = (-1,5,3)$.
Então,

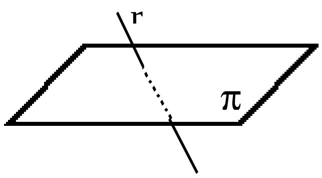
$$d(Q,r) = \frac{|(1,9,7)\times(-1,5,3)|}{\sqrt{35}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}.$$

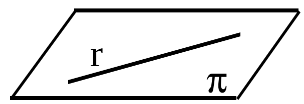
6.4 Distância entre uma reta e um plano

A distância entre a reta r e o plano π é indicada por d(r, π) e definida como a menor distância entre os pontos de r a π.

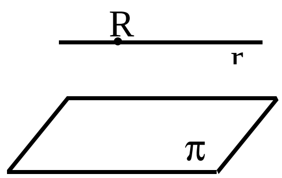
Assim:

a) Se r e π são concorrentes ou se r está contida em π então $d(r,\pi) = 0$.





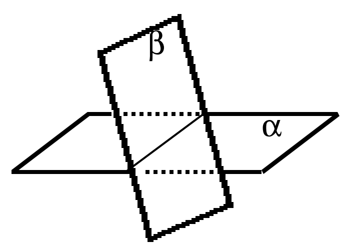
b) Se r é paralela a π então d(r, π) = d(R, π) ; R $\in$ r.



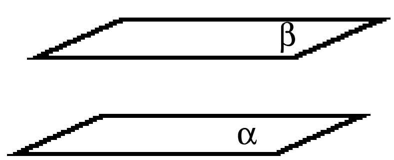
6.5 Distância entre dois planos

A distância entre os planos α e β é indicada por $d(\alpha,\beta)$ e definida como a menor distância entre os pontos de α a β. Assim,

a) Se α e β são concorrentes então $d(\alpha,\beta) = 0$.



b) Se α e β são paralelos então $d(\alpha,\beta) = d(P,\beta)$; P $\in$ α.



Exemplos:

1. Calcule $d(r,\pi)$ nos seguintes casos:

a) $r:\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi: 3x - y + 2z - 2 = 0$

b) $r: X = (1,2,1) + h(-1,1,0);\ h \in IR$ e $\pi: 3x + 3y + z - 2 = 0$

Solução:

a) Sabemos que $\vec{v}_r \ //\ (2,-1,1)\times(1,1,-1) = (0,3,3)$. Consideremos $\vec{v}_r = (0,1,1)$ e $\vec{n}_\pi = (3,-1,2)$. Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 1$, temos que r e π são concorrentes. Portanto, $d(r, \pi)=0$.

b) Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R(1,2,1) \notin \pi$, concluímos que r é paralela a π.

Assim, $d(r,\pi) = d(R,\pi) = \dfrac{|3.1 + 3.2 + 1.1 - 2|}{\sqrt{19}} = \dfrac{8\sqrt{19}}{19}$, sendo $R(1,2,1)$ um ponto de r.

2. Calcule $d(\alpha,\beta)$ nos seguintes casos:

a) $\alpha: X = h(1,-1,0) + t(0,1,1);\ h, t \in IR$ e $\beta: 3x + 3y - z + 3 = 0$

b) $\alpha: 2x + 2y - 2z + 1 = 0$ e $\beta:\begin{cases} x = h \\ y = -h + t \\ z = t \end{cases};\ h, t \in IR$

Solução:

a) Sejam $\vec{n}_\alpha = (1,-1,0)\times(0,1,1) = (-1,-1,1)$ e $\vec{n}_\beta = (3,3,-1)$.
Como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são LI temos que α e β são concorrentes. Assim, $d(\alpha,\beta) = 0$.

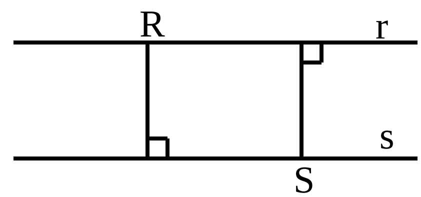
b) Sejam $\vec{n}_\alpha = (2,2,-2)$ e $\vec{n}_\beta = (1,-1,0)\times(0,1,1) = (-1,-1,1)$. Como estes vetores são LD, concluímos que α e β são paralelos. Assim, $d(\alpha,\beta) = d(P,\alpha) = \dfrac{|2.0 + 2.0 - 2.0 - 1|}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, sendo $P(0,0,0)$ um ponto de β.

6.6 Distância entre duas retas

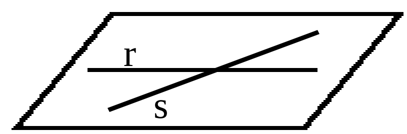
A distância entre as retas r e s é indicada por d(r,s) e definida como a menor distância entre os pontos de r e s.

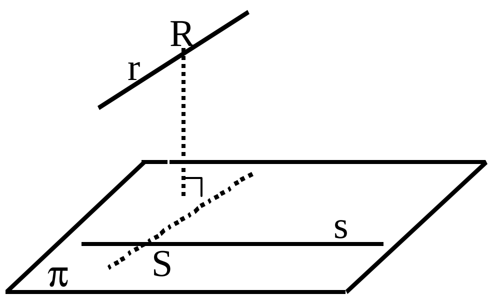
Consideremos as retas $r: X = R + t\vec{v}_r;\ t \in IR$ e $s: X = S + h\vec{v}_s;\ h \in IR$. Assim,

1) Se r é paralela a s então
d(r,s) = d(R,s) = d(S,r) .



2) Se r e s são concorrentes então d(r,s)= 0.



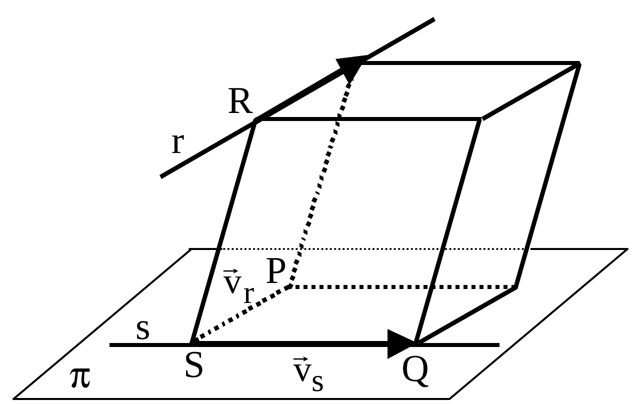


3) Se r e s são reversas então $d(r,s) = d(r,\pi) = d(R,\pi)$, sendo π um plano que contém s e é paralelo a r. Assim,

$$d(r,s) = d(R,\pi) = |\,proj_{\vec{v}_r \times \vec{v}_s} \overrightarrow{RS}\,|$$

Ou seja, $$\mathbf{d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}}$$

Da interpretação geométrica de produto misto e produto vetorial, concluímos que d(r,s) é a altura do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores $\overrightarrow{SR}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ em relação à base SPQ, sendo $P = S + \vec{v}_r$ e $Q = S + \vec{v}_s$.



Exemplos:

1. Calcule d(r,s) nos seguintes casos:

a) $r: X = (1,0,2) + h(1,1,1);\ h \in IR$ e $s: x - 1 = y + 2 = z - 3$

b) $r: X = (3,-1,1) + t(2,0,1);\ t \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 6 - h \\ y = -2 + h\,; \quad h \in IR \\ z = 1 + h \end{cases}$

c) $r: X = (1,1,1) + h(-1,2,1);\ h \in IR$ e $s: X = (1,1,3) + t(2,1,3);\ t \in IR.$

Solução:

a) As retas r e s são paralelas pois $\vec{v}_r = (1,1,1) = \vec{v}_s$.
Assim, d(r,s) = d(R,s) = d(S,r).
Consideremos $R(1,0,2)$ e $S(1,-2,3)$ pontos de r e s, respectivamente.
Então:

$$d(r,s) = \frac{|\,(0,-2,1) \times (1,1,1)\,|}{|\,(1,1,1)\,|} = \frac{\sqrt{42}}{3}\,.$$

b) Temos $\vec{v}_r = (2,0,1)$ e $\vec{v}_s = (-1,1,1)$. Assim, as retas não são paralelas.
Sejam $R(3,-1,1)$ e $S(6,-2,1)$ pontos de r e s, respectivamente. Então:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Logo, r e s são concorrentes e d(r,s) = 0.

c) Sejam $\vec{v}_r = (-1,2,1)$ e $\vec{v}_s = (2,1,3)$. Assim, as retas não são paralelas.
Consideremos $R(1,1,1)$ e $S(1,1,3)$ pontos de r e s, respectivamente.
Então:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0\,.$$

Daí, r e s são reversas .

Logo,

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2) Sejam r: X = (1,2,0) + t(1,1,1); t $\in$ R e s: $\begin{cases} x = ah \\ y = 1 + h \ ; h \in R. \\ z = 2 - h \end{cases}$

Determine a, de modo que :

a) d(r,s)= 0

b) r e s sejam reversas.

Solução:

a) d(r,s) = 0 $\Rightarrow$ r e s são concorrentes ou coincidentes. Sejam $\vec{v}_r = (1,1,1)$, $\vec{v}_s = (a,1,-1)$, $R(1,2,0)$ e $S(0,1,2)$.

Como não existe a real tal que $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ sejam LD, podemos afirmar que d(r,s) = 0 se, e somente se, $\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = 0.$

Mas,

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 3a.$$

Logo, r e s são concorrentes se, e somente se, a = 1.

b) Da solução do item a), temos que r e s são reversas se, e somente se, $a \in R - \{1\}$.