Exercícios propostos

01. Escreva uma equação da reta r nos casos a seguir:

a) r passa pelo ponto $P(-2,-1,3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2,1,1)$.
b) r passa pelos pontos $A(1,3,-1)$ e $B(0,2,3)$.

02. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o ponto P pertence à reta r:

a) $P(-2,1,1)$ e $r: X = (1,0,0) + h(-1,2,1);\ h \in IR$

b) $P(2,-1,-7)$ e $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -5 + 2t \end{cases};\ t \in IR$

c) $P\left(2, \dfrac{1}{2}, 3\right)$ e $r: x - 1 = 2(y - 2) = \dfrac{z}{3}$

03. Escreva uma equação do plano **a** nos casos a seguir:

a) **a** passa pelos pontos $A(1,0,2)$ e $B(2,-1,3)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (0,1,2)$.

b) **a** passa pelos pontos $A(3,1,-1)$ e $B(1,0,1)$ e é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CD}$, sendo $C(1,2,1)$ e $D(0,1,0)$.
c) **a** passa pelos pontos $A(1,0,2)$, $B(1,0,3)$ e $C(2,1,3)$.

04. Verifique em cada um dos itens abaixo se o ponto P dado pertence ao plano π.

a) $P(1,-1,0)$, $\pi: X = (2,1,3) + h(1,0,1) + t(0,1,0);\ t$ e $h \in IR$

b) $P(2,1,3)$, $\pi: x + y - 2z + 3 = 0$.

c) $P(3,2,2)$, $\pi: \begin{cases} x = 1 - h + t \\ y = 2 - h - t \\ z = 1 - h \end{cases};\ t, h \in IR$

05. O ponto $P(2,2,-1)$ é o pé da perpendicular traçada do ponto $Q(5,4,-5)$ ao plano π. Determine uma equação de π.

06. Determine um vetor normal ao plano:

a) determinado pelos pontos $P(-1,0,0)$, $Q(0,1,0)$ e $R(0,0,-1)$.
b) $\alpha: 2x - y + 1 = 0$.
c) que passa pelos pontos $A(1,0,1)$ e $B(2,2,1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (1,-1,3)$.
d) $\alpha: \begin{cases} x = 1 + t + h \\ y = 1 - t + 2h \,;\, t \text{ e } h \in IR \\ z = h \end{cases}$

07. Determine as equações dos planos coordenados na forma geral.

08. a) Verifique se $P(1,3,-2)$ pertence a $r: \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -x + y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$.

b) Escreva uma equação da reta r passa pelo ponto $P(1,1,1)$ e tem a direção

de um vetor normal ao plano $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t + 3h \,;\; t \text{ e } h \in IR \\ z = t + h \end{cases}$.

09. Determine a equação geral do plano β paralelo ao plano

$\alpha: \begin{cases} x = 1 + h + 2t \\ y = 2 + 2h + t \,;\, h \text{ e } t \in IR \\ z = 3t \end{cases}$ e que

a) passa pelo ponto $P(3,2,0)$;
b) passa pela origem do sistema de coordenadas.

10. Determine uma equação do plano π:

a) que contém o eixo OX e passa pelo ponto $P(5,-2,1)$.
b) que passa pelo ponto $P(-2,1,3)$ e é perpendicular à reta $r: X = (1,0,1) + h(1,-3,2); h \in IR$.

11. Verifique se as retas r e s nos casos a seguir são coplanares:

a) $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ e $s: X=(1,0,1)+h(3,-1,1);\ h\in IR$

b) $r:\dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z-2}{3}$ e $s: X=(1,-2,2)+h\,(0,1,3)\,;h\in IR$

c) $r:\begin{cases} x=1+h \\ y=2-3h\,;h\in IR \\ z=h \end{cases}$ e $s:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{2-y}{6}=\dfrac{z-2}{2}$

12. Determine o valor de **a** para que as retas r e s sejam concorrentes e ache o ponto de interseção, sendo:

$r:\dfrac{x}{2}=-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{a}$ $\qquad s:\begin{cases} x=3h-1 \\ y=2h-5\,;h\in IR\,. \\ z=h \end{cases}$

13. Determine, se possível, uma equação geral do plano determinado pelas retas r e s, nos casos a seguir:

a) $r: X=(1,2,0)+h\,(-1,2,3)\,;h\in IR$

$s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=-z$

b) $r: X=(-1,2,1)+h\,(1,2,-1)\,;h\in IR$

$s: X=(2,5,-2)+t\,(-2,4,2)\,;t\in IR$

c) $r: X=(1,2,3)+h\,(1,0,2)\,;h\in IR$

$s:\begin{cases} x=2t \\ y=3 \qquad ;t\in IR \\ z=1+4t \end{cases}$

14. Sejam $\alpha: 2x + By + z + 1 = 0, \beta: x + y + \frac{z}{2} + D = 0,\ s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = h \\ z = A \end{cases}; h \in IR$

e $r:\ x - 1 = -\frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$. Determine, se possível:

a) B, tal que α e β sejam paralelos.
b) B, tal que α e β sejam perpendiculares.
c) D, tal que $r \subset \beta$
d) A, tal que r e s sejam coplanares.

15. Considere os pontos $P(4, a, 4)$ e $Q(0, 3b + 8, b)$, as retas $r: x - 1 = \frac{2-y}{3} = z$

e $s: X = Q + t\,(1,0,2)\,; t \in IR$ e os planos $\pi_1: mx - 2y + (m+3)z - 1 = 0$ e $\pi_2: X = t(1,-3,1) + h(2,-3,1)\,; t$ e $h \in IR$. Determine, se possível:

a) **a**, de modo que a reta paralela à reta s que passa pelo ponto P seja reversa com a reta r.
b) **b** e **m**, de modo que a reta s seja paralela ao plano π_1.
c) **m**, de modo que os planos π_1 e π_2 sejam concorrentes segundo a reta r.

16. **a)** Determine uma equação da reta s que passa pela origem do sistema de coordenadas, é paralela ao plano $\pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$ e intercepta a reta $r: x - 1 = \frac{y+2}{3} = z$.

b) Ache uma equação do plano α que passa pelo ponto P(2,1,3), é paralelo à reta $r: X = (1,2,3) + h(1,2,-1); h \in IR$, e é perpendicular ao plano $\pi: x - y + 2z - 4 = 0$.

17. Considere as retas r e t, tais que:

(i) r passa pelo ponto $P(3,1,-1)$ e é paralela à reta $s: \begin{cases} x - y + 3z - 5 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$;

(ii) t passa pela origem do sistema de coordenadas e seu vetor direção tem ângulos diretores iguais.

Determine:

a) as equações simétricas de r.
b) as equações paramétricas de t.

18. Dado o plano $\pi: X=(0,0,1)+h(1,-1,-1)+t(-1,-2,-4); h,t \in IR$ e a reta AB, sendo A(0,0,0) e B(1,1,1), determine uma equação do plano α que passa pelo ponto onde a reta AB fura o plano π e é paralelo ao plano $\beta: x-3=0$.

19. a) Determine o simétrico de P(2,1,3) em relação:

(i) ao ponto $Q(3,-1,1)$.

(ii) à reta $r:\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}; t \in IR$.

(iii) ao plano $2x-2y+3z=2$.

b) Encontre uma equação da reta s simétrica da reta $t: x-2=y-1=z-3$, em relação ao plano do item a(iii).

20. Determine o ângulo das retas $s: X=(1,0,0)+h(2,1,-1); h \in IR$ e $r: \dfrac{x-1}{2}=y=-z$.

21. Determine o ângulo da reta $r: x=-y=z$ com o plano α, nos casos a seguir:

a) $\alpha: 2x-y-z-1=0$;

b) $\alpha:\begin{cases} x=1+2h-t \\ y=h+t \\ z=4-2t \end{cases}; h,t \in IR$.

22. Determine o ângulo dos planos:

a) $\alpha: x+y-2z=0$ e $\beta: -2x+y+3z-2=0$;

b) $\alpha:\begin{cases} x=2-h \\ y=1+2t \\ z=2h-3t \end{cases}; h,t \in IR$ e $\beta: -2x+y+3z-2=0$.

23. Determine uma equação da reta s que passa por P(1,0,1) e intercepta a reta $r: x=y=z+1$, formando um ângulo de $\dfrac{\pi}{3}$rd.

24. Determine uma equação do plano α que passa pelo ponto P(2,1,1), é perpendicular ao plano coordenado yz e $(\alpha,\beta)=\arccos(2/3)$ rd, sendo o plano $\beta: 2x-y+2z+3=0$.

25. Considere o plano α determinado pelo ponto P(1,2,0) e pela reta $r: \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z-4}{3}$. Calcule o ângulo que α forma com a reta $s: \begin{cases} x-2y=1 \\ x+4z=0 \end{cases}$

26. Calcule a distância entre:

a) o ponto P(0,0,2) e a reta $r: \begin{cases} x=z+1 \\ y=2z-2 \end{cases}$.

b) o plano $\pi: X=(1,2,-1)+h(3,2,-1)+t(1,1,0);\ h,t\in IR$ e o ponto $P(2,1,-3)$.

c) as retas $r: \dfrac{x-1}{2}=2-y=z-3$ e $s: \begin{cases} \dfrac{x-2}{5}=z \\ y=z-1 \end{cases}$.

d) as retas $r: X=(1,0,0)+h(-2,4,2);\ h\in IR$ e $s: 2-x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

e) a reta $r: x=-y=z$ e o plano $\pi: 2x-y-z-1=0$.

27. a) Escreva as equações dos planos β e γ paralelos ao plano $\alpha: 2x-2y-z=3$ distando dele 5 unidades.

b) Encontre uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de:

(i) A(1,–4,2) e B(7,1,–5)   (ii) A(1,2,1), B(1,4,3) e C(3,2,1)

c) Dados os pontos A(2,1,3), B(4,–1,1) e o plano $\alpha: 2x-y+2z-3=0$, determine uma equação da reta r contida em α, tal que todo ponto de r é equidistante dos pontos A e B.

28. De um triângulo ABC temos as seguintes informações:

(i) $A(1,2,-3)$ (ii) B e C são pontos da reta $r:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$; $t \in IR$.

Determine a altura do triângulo ABC relativa à base BC.

29. Considere $\alpha: 2x + 3y - z + 1 = 0$, $P(1,-4,5)$ e $s:\begin{cases} x = y + 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Determine, justificando:

a) d(P,s) b) d(P, α)

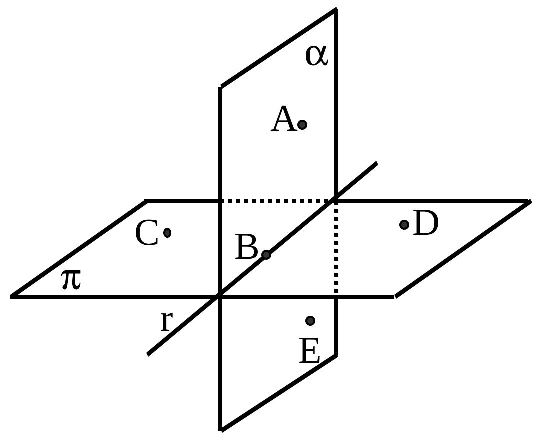
c) uma equação da reta m que satisfaz às três condições:
(i) d(P,m) = 0 (ii) d(m,s) = 0 (iii) d(m, α) = d(P, α).

30. Da figura ao lado sabemos que:

(i) os planos α e $\pi: x - z = 0$ são perpendiculares.

(ii) $A(0,2,-1)$ e $B(-1,3,-1)$.

(iii) C e D são pontos de π.



Determine:

a) Uma equação do plano α.

b) As equações paramétricas da reta r interseção dos planos α e π.

c) Uma equação do plano β que passa por A e é paralelo a π.

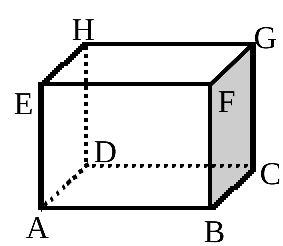
d) A altura do tetraedro ABCD relativa à base BCD.

e) As coordenadas do ponto E, sabendo que o triângulo ABE é equilátero e r contém a altura deste triângulo relativa ao vértice B.

31. Do paralelepípedo dado a seguir sabe-se que:

(i) O plano $ABC: x + y - z + 6 = 0$ e a reta $DG: X = t(1,2,-3)$, $t \in IR$.

(ii) O plano ABF é perpendicular ao plano ABC e $F = (0,2,0)$.



Determine:

a) As equações simétricas da reta AF.

b) As equações paramétricas do plano ABF.

c) As coordenadas do ponto D.

d) Uma equação geral do plano EFG.

32. Determine o volume da pirâmide delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $5x - 2y + 4z = 20$.

33. Escreva as equações de uma reta t paralela aos planos α e β, e concorrente com as retas r e s, considerando:

$\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ $\beta: x + 3y + 2z - 2 = 0$

$r: X = (1,2,1) + h(1,0,2);\ h \in IR$ $s: X = (2,3,-2) + \lambda(1,-2,3);\ \lambda \in IR$

34. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. Mostre que a equação $ax + by + cz + d + t(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0,\ t \in IR$, representa a família dos planos que contém a reta r, com exceção do plano β. Esta família é chamada de **feixe de planos de eixo r.**

35. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha: x + y + z - 11 = 0$ e $\beta: x - 4y + 5z - 10 = 0$. Determine a equação do plano que contém a reta r, e:

a) passa pelo ponto $A(3,-1,4)$.

b) é paralelo ao plano $9x - 21y + 33z + 1 = 0$.

c) dista 3 unidades da origem do sistema de coordenadas.

d) é perpendicular a α.

e) é paralelo à reta $x = -\frac{y}{2} = -z$.

f) é paralelo ao eixo ox.

Respostas

01. a) $r: (x, y, z) = (-2,-1,3) + t\,(2,1,1);\ t \in IR$

b) $r: x - 1 = y - 3 = \frac{z + 1}{-4}$

02. a) $P \notin r$ b) $P \in r$ c) $P \notin r$

03. a) $\alpha:(x, y, z) = (1,0,2) + t\,(1,-1,1) + h\,(0,1,2)\,;\ t \text{ e } h \in IR$

b) $\alpha: 3x - 4y + z - 4 = 0.$

c) $\alpha: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + t + h \end{cases} \quad ; t \text{ e } h \in IR$

04. a) $P \notin \pi$ b) $P \in \pi$ c) $P \in \pi$

05. $\pi: 3x + 2y - 4z - 14 = 0$.

06. a) $(1,-1,1)$ b) $(2,-1,0)$ c) $(2,-1,-1)$ d) $(1,1,-3)$

07. plano OXY : $z = 0$;   plano OXZ : $y = 0$;   plano OYZ : $x = 0$.

08. a) $P \in r$ **b)** $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad ; t \in IR$.

09. a) $2x - y - z - 4 = 0$ **b)** $2x - y - z = 0.$

10. a) $\pi: X = t\,(1,0,0) + h\,(5,-2,1)\,;\ t \text{ e } h \in IR$ ou $\pi:\ y + 2z = 0.$

b) $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0.$

11. a) Não   **b)** Sim   **c)** Sim

12. $a = 1,\ I(2,-3,1)$.

13. a) $\alpha: -11x + 5y - 7z + 1 = 0$ **b)** $\beta: x + z = 0$ **c)** $\gamma: -2x + z - 1 = 0$

14. a) $B = 2$ **b)** $B = -\dfrac{5}{2}$ **c)** $D = 1$ **d)** $A = -2$

15. a) $a \neq -4$ **b)** $m = -2$ e $b \neq -\dfrac{17}{5}$

c) $\nexists\ m \in IR$ tal que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$

16. a) $s: X = h\left(1, \dfrac{17}{9}, \dfrac{7}{9}\right); h \in IR$ **b)** $\alpha: -x + y + z - 2 = 0$

17. a) $r:\ x-3=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ **b)** $t:\begin{cases} x=h \\ y=h \\ z=h \end{cases};\ h\in IR.$

18. $\alpha: 4x+3=0$

19. **a)** (i) $P'(4,-3,-1)$ (ii) $P'(0,-1,1)$ (iii) $P'\left(-\dfrac{2}{17},\dfrac{53}{17},-\dfrac{3}{17}\right)$

b) $s: X=(-1,-2,0)+h(15,87,-3)\ ;\ h\in IR$

20. $(r,s)=0°$

21. **a)** $(r,\alpha)=\text{arc sen}\left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)$ **b)** $(r,\alpha)=\text{arc sen}\left(\sqrt{\dfrac{3}{29}}\right).$

22. **a)** $(\alpha,\beta)=\text{arc cos}\left(\dfrac{7}{2\sqrt{21}}\right)$ **b)** $(\alpha,\beta)=\text{arc cos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{29}\sqrt{14}}\right).$

23. $s: X=(1,0,1)+h(\sqrt{2},3+\sqrt{2},-3+\sqrt{2});\ h\in IR$ e

$s': X=(1,0,1)+t(-\sqrt{2},3-\sqrt{2},-3-\sqrt{2});\ t\in IR.$

24. $\alpha_1:\ z-1=0$ e $\alpha_2:\ 4y-3z-1=0.$

25. $(\alpha,s)=\text{arc sen}\left(\dfrac{14}{3\sqrt{105}}\right).$

26. a) $d(P,r)=\sqrt{\dfrac{29}{6}}$ **b)** $d(P,\pi)=0$ **c)** $d(r,s)=\dfrac{32}{\sqrt{62}}$

d) $d(r,s)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **e)** $d(r,\pi)=0.$

27. a) $\beta: 2x-2y-z+12=0$ e $\gamma: 2x-2y-z-18=0.$

b) (i) Plano $\pi: 6x+5y-7z-27=0.$ (ii) Reta $s:\begin{cases} x=2 \\ y-2=3-z \end{cases}$

c) $r:\begin{cases} 2x-y+2z-3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$

28. $h = 2\sqrt{2}$ u.c.

29. **a)** $d(P,s) = 2\sqrt{3}$ **b)** $d(P,\alpha) = \sqrt{14}$ **c)** $m: X = (1,-4,5) + t(7,-3,5)\,;\ t \in IR$.

30. a) $\alpha: x + y + z - 1 = 0$ **b)** $r: \begin{cases} x = -1 + h \\ y = 3 - 2h \\ z = -1 + h \end{cases} ;\ h \in IR$. **c)** $\beta: x - z - 1 = 0$

d) $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $E(-1,2,0)$.

31. a) reta $AF: x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-3}$ b) Plano $ABF: \begin{cases} x = t + h \\ y = 2 + 2t + h \\ z = -3t - h \end{cases} ,\ t\,,\, h \in IR$.

c) $D = (-1,-2,3)$. d) Plano $EFG: x + y - z - 2 = 0$.

32. $V = \dfrac{100}{3}$ u.v.

33. $t: X = (4,-1,4) + h(1,-1,1)\ ;\ h \in IR$.

34. Se r é a reta interseção dos planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, todo ponto de r satisfaz às equações destes planos. Ou seja, se $P(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de r, então $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ e $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0$. Daí, o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ satisfaz à equação $ax + by + cz + d + t(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$. Logo, esta última equação representa um plano que contém a reta r.

Por outro lado, seja $\gamma: \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0$ um plano distinto de β e que contém a reta r. Vamos mostrar que existe um $t_0 \in IR$, tal que uma equação do plano γ é $ax + by + cz + d + t_0(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$.
Então, se r está contida em γ as condições seguintes devem ser satisfeitas:

(i) $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{v}_r = 0$ (ii) Todo ponto P de r pertence a γ.

Como r é a interseção de α e β, temos que $\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$, daí, $\vec{n}_\gamma \cdot (\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) = 0$. Ou seja, $[\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = 0$. Logo, os vetores $\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são coplanares. Como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são linearmente independentes, existem escalares t_1 e t_2, tais que $\vec{n}_\gamma = t_1\vec{n}_\alpha + t_2\,\vec{n}_\beta$. Observe que como γ e β são distintos, t_1 não pode ser igual a zero. Assim, podemos escrever: $\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha + \frac{t_2}{t_1}\vec{n}_\beta$.

Fazendo $t_0 = \frac{t_2}{t_1}$, temos $\vec{n}_\gamma = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a + t_0 a_1, b + t_0 b_1, c + t_0 c_1)$. Então uma equação do plano γ é :

$$(a + t_0 a_1)x + (b + t_0 b_1)y + (c + t_0 c_1)z + \bar{d} = 0.$$

Utilizando a condição (ii), seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de r, então temos:

$$(a + t_0 a_1)x_0 + (b + t_0 b_1)y_0 + (c + t_0 c_1)z_0 + \bar{d} = 0$$

Daí, $\bar{d} = (-ax_0 - by_0 - cz_0) + t_0(-a_1x_0 - b_1x_0 - c_1z_0) = d + t_0 d_1$.
Portanto,

$$\gamma : ax + by + cz + d + t_0(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0.$$

35. **a)** $22x - 3y + 42z - 237 = 0$ **b)** $3x - 7y + 11z - 31 = 0$

c) $2x - 3y + 6z - 21 = 0$ ou $92x + 327y - 96z - 1059 = 0$

d) $x - 14y + 13z - 8 = 0$

e) $3x - 2y + 7z - 32 = 0$ **f)** $5y - 4z - 1 = 0$.