Exercícios resolvidos

1. Um paralelepípedo ABCDEFGH de base ABCD tem volume igual a 9 unidades. Sabendo-se que $A(1,1,1), B(2,1,2), C(1,2,2),$ o vértice E pertence à reta r de equação $r: x = -y = 2 - z$ e $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é agudo. Determine as coordenadas do vértice E.

Solução:

Como E pertence à reta r, temos $E(t, -t, 2-t)$ e $\overrightarrow{AE} = (t-1, -1-t, 1-t)$. Assim,

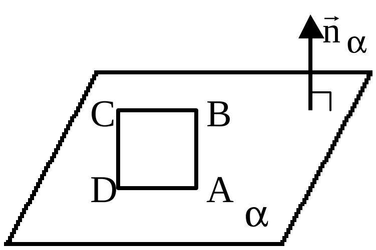
$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ t-1 & -t-1 & 1-t \end{vmatrix} \right| = |3 - t| = 9.$$

Logo $t = -6$ ou $t = 12$.

Se $t = -6$, então $\overrightarrow{AE} = (-7, 5, 7)$ e $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{i} = -7$. Logo $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é obtuso. Como este valor de t contradiz uma das hipóteses do nosso exercício, consideremos t = 12. Neste caso, $\overrightarrow{AE} = (11, -13, -11)$ e $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{i} = 11$ assim, $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é agudo. Portanto $E = A + \overrightarrow{AE} = (12, -12, -10)$.

2. Um quadrado ABCD está sobre o plano $\alpha: x - y + 2z - 1 = 0$. Sabendo-se que $A(1,0,0)$ e $B(0,1,1)$ são vértices consecutivos. Determine as coordenadas dos outros dois vértices.

Solução:



De $A(1,0,0)$ e $B(0,1,1)$ temos $\overrightarrow{AB} = (-1,1,1)$ e de $\alpha: x - y + 2z = 1$ temos $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 2)$.

Como $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} \perp \vec{n}_\alpha$ temos:

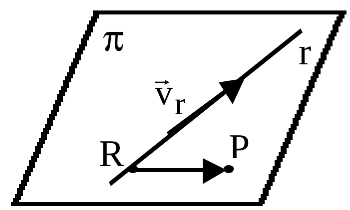
$$\overrightarrow{AD} \,//\, \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_\alpha = (3,3,0).$$

Além disso, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$. Considerando $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ temos: $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, $D = A + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ e $C = B + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}+2}{2}, 1\right)$.

Podemos observar que considerando $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ encontraremos a outra solução do exercício.

3. Determine uma equação do plano π que passa pelo ponto $P(1,0,1)$ e contém a reta de equação $r: \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

Solução:



Sejam $R(-1,0,0)$ um ponto da reta r e o vetor $\vec{v}_r = (1,1,0) // (0,3,3) = (1,-1,1) \times (2,1,-1)$. Como o ponto $P(1,0,1)$ não pertence à reta r, temos $\overrightarrow{RP} = (2,0,1)$ e $\vec{v}_r$ são vetores LI com representantes em π. Assim, uma equação vetorial do plano π é:

$$\pi\ :\ (x, y, z) = (1,0,1) + t\,(2,0,1) + h\,(0,1,1)\,;\ t, h \in IR$$

4. Determine uma condição necessária e suficiente para que um plano $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ seja ortogonal ao plano XOZ.

Solução:

Observemos que os vetores $\vec{j} = (0,1,0)$ e (A,B,C) são normais aos planos XOZ e α, respectivamente. Assim, os planos α e XOZ são ortogonais se, somente se, $(A, B, C) \cdot (0,1,0) = 0$. Daí, B = 0.

Observação: De modo análogo, podemos mostrar que as condições necessárias e suficientes para que um plano $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ seja ortogonal ao plano XOY e ao plano YOZ são, respectivamente $C = 0$ e $A = 0$.

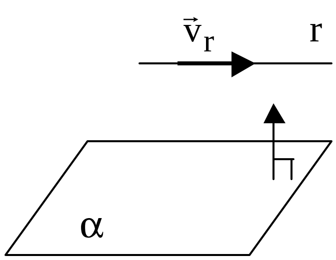
5. Determine uma equação geral de um plano que contém a reta $s:\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=y-1=\dfrac{z+3}{3}\end{cases}$ e é ortogonal ao plano YOZ.

Solução:

Observemos que o plano $\alpha: y-1=\dfrac{z+3}{3}$ contém a reta s, já que todos os pontos de s satisfazem à equação de α. Além disso, $\alpha: 3y-z-6=0$ é ortogonal a plano YOZ (porque?). Assim, α é o plano procurado.

6. Mostre que um plano $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ é paralelo ao eixo OY se, e somente se, é ortogonal ao plano XOZ.

Solução:



Sabemos que um plano α é paralelo a uma reta r se, e somente se, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{v}_r = 0$. Assim, o plano α é paralelo ao eixo OY se, e somente se $0=(A,B,C)\cdot(0,1,0)=B$. Portanto a condição α paralelo ao eixo OY é equivalente a α ortogonal ao plano XOZ.

7. Dados os planos $\alpha: Ax+4y+4z+D=0$ e $\beta: 6x+8y+Cz-2=0$, determine as constantes A, C e D tais que:

a) $d(\alpha,\beta)=\sqrt{41}$

b) O plano α seja ortogonal ao plano β e contém o eixo OX.

Solução:

a) Como $d(\alpha,\beta)\neq 0$ temos que $\alpha\cap\beta=\phi$. Assim, os vetores $\vec{n}_\alpha=(A,4,4)$ e $\vec{n}_\beta=(6,8,C)$ são paralelos e portanto $A=3$ e $C=8$. Tomemos $P(1,-1,0)$ um ponto do plano β. Sabemos que:

$$d(\alpha,\beta)=d(P,\alpha)=\frac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+4\cdot 0+D|}{\sqrt{9+16+16}}=\sqrt{41}.$$

Assim, $|D-1|=41$, logo $D=42$ ou $D=-40$.

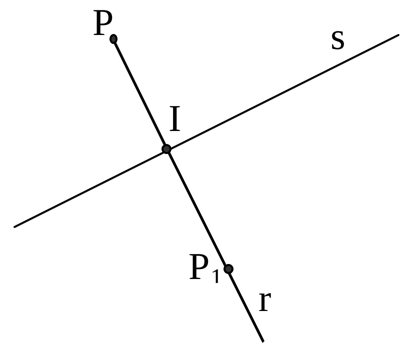
b) Como o plano α contém o eixo OX temos $A = 0$ e $D = 0$. Da ortogonalidade dos planos α e β temos:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (0,4,4)\cdot(6,8,C) = 32 + 4C = 0\,.$$

Logo $C = -8$.

8. Determine as coordenadas do ponto P_1, simétrico de $P(1,1,-2)$ em relação à reta $s: x+1 = y-1 = z$.

Solução:

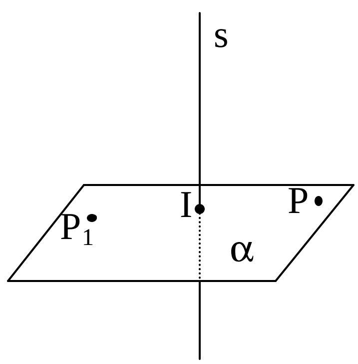


Sejam r a reta perpendicular à reta s que passa pelo ponto P e $\{I\} = r \cap s$. Então, $I = (t-1, 1+t, t)$ e podemos considerar $\vec{v}_r = \overrightarrow{PI} = (t-2, t, t+2)$. Como as retas r e s são ortogonais temos:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (t-2, t, t+2)\cdot(1,1,1) = 0$$

Logo, $t = 0$ e $\overrightarrow{PI} = (-2,0,2)$. Como $\overrightarrow{IP_1} = \overrightarrow{PI}$ temos $P_1 = I + \overrightarrow{IP_1}$. Assim $P_1 = (-1,1,0) + (-2,0,2) = (-3,1,2)$.

Observação:

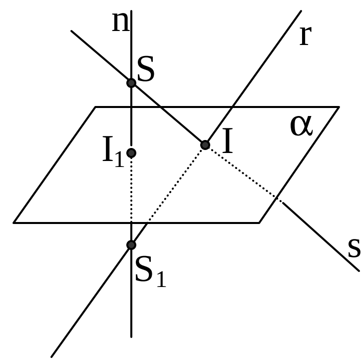


O ponto I também poderia ser determinado através da interseção da reta s com o plano α que passa pelo ponto P e é ortogonal à reta s.

Sendo α perpendicular a s temos:
α: $x + y + z + D = 0$. Utilizando o fato de que $P \in \alpha$, podemos concluir que $D = 0$.

9. Determine uma equação da reta r, simétrica da reta $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \qquad ; t \in IR \\ z = 2 \end{cases}$, em relação ao plano $\alpha: x - y + z + 1 = 0$.

Solução:



Observemos que se S e Q são pontos da reta s então S_1 e Q_1 , simétricos de S e Q, respectivamente, em relação ao plano α são pontos da reta r.

De $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\alpha = (2,1,0)\cdot(1,-1,1) \neq 0$, temos que s e α são concorrentes. Seja $\{I\} = s \cap \alpha$. Então, $I = (1+2t, t, 2)$ e $1 + 2t - t + 2 + 1 = 0$. Logo, $t = -4$ e $I(-7,-4,2)$. Assim, as equações paramétricas da reta n, normal a α e concorrente com a reta s em S(1,0,2) são :

$$n : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \quad ; t \in IR \ . \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Considerando $\{I_1\} = n \cap \alpha$, temos $I_1 = (1+t, -t, 2+t)$ e $1 + t + t + 2 + t + 1 = 0$. Logo, $t = -\frac{4}{3}$ e portanto $I_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Daí, $S_1 = I_1 + \overrightarrow{SI_1} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Como I e S_1 são pontos distintos de r podemos considerar $\vec{v}_r = \frac{3}{4}\overrightarrow{S_1 I}$.

Assim, uma equação vetorial de r é :

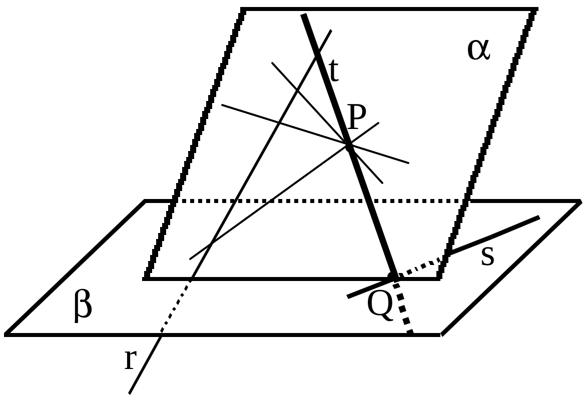
$$X = (-7,-4,2) + h(4,5,-2); \ h \in IR.$$

10. Determine, caso exista, uma reta t que passa pelo ponto $P(1,-2,-1)$ e é concorrentes com as retas r e s.

$$r : \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda - 3; \ \lambda \in IR \\ z = \lambda \end{cases} \quad e \quad s : \begin{cases} x = h - 2 \\ y = 1 - h \quad ; h \in IR \ . \\ z = h \end{cases}$$

Solução 1:

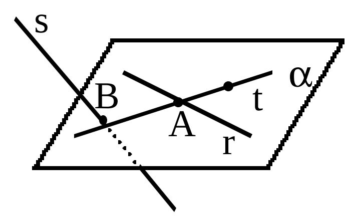
Podemos verificar que r e s são retas reversas e que $P \notin r$. Assim, o plano α determinado por P e r, contém toda reta que passa por P e é concorrente com r. Logo, a reta t, caso exista, está contida em $\alpha : x - y + z - 2 = 0$.



De $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$ concluímos que s e α são concorrentes, seja $\{Q\} = s \cap \alpha$. Como $Q \in s$ temos $Q(h-2, 1-h, h)$, por outro lado, Q também pertence a α daí, $h - 2 - (1-h) + h - 2 = 0$. Consequentemente, $h = \frac{5}{3}$ e $Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Como $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ não é paralelo a $\vec{v}_r = (1,2,1)$, podemos escrever:

$$t : X = P + \lambda \overrightarrow{PQ}; \lambda \in IR$$

Solução 2:



Consideremos que exista uma reta t que passa por P e é concorrente com as retas r e s em A e B, respectivamente.

Assim, $A(\lambda - 1, 2\lambda - 3, \lambda)$, $B(h-2, 1-h, h)$, $\overrightarrow{PA} = (\lambda - 2, 2\lambda - 1, \lambda + 1)$ e $\overrightarrow{PB} = (h-3, 3-h, h+1)$. Como P, A e B são pontos colineares os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são LD. Daí podemos escrever:

$$\frac{\lambda - 2}{h-3} = \frac{2\lambda - 1}{3-h} = \frac{\lambda + 1}{h+1}$$

De $\frac{\lambda - 2}{h-3} = \frac{2\lambda - 1}{3-h}$ temos $\lambda - 2 = 1 - 2\lambda$. Logo, $\lambda = 1$ e $\overrightarrow{PA} = (-1, 1, 2)$.

Considerando $\vec{v}_t = \overrightarrow{PA}$, as equações paramétricas da reta t são:

$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = -2 + a \quad ; a \in IR \\ z = -1 + 2a \end{cases}$$

11. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto Q(2,1,0), é concorrente com a reta $s:\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}\ ; t \in IR$ e forma ângulos iguais com os eixos OX e OY.

Solução:

Sejam r a reta que queremos determinar e $\{I\} = r \cap s$. Assim $I = (2+t, 3t, t)$ e $\vec{v}_r = \overrightarrow{QI} = (t, 3t-1, t)$. Como $(r, OX) = (r, OY)$ temos a equação:

$$\frac{|(1,0,0)\cdot(t,3t-1,t)|}{|\vec{v}_r|} = \frac{|(0,1,0)\cdot(t,3t-1,t)|}{|\vec{v}_r|}.$$

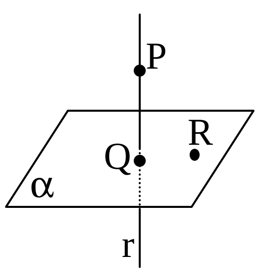
Logo, $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{4}$.

Considerando $t = \frac{1}{2}$, temos $\vec{v}_r \,//\, (1,1,1)$ e $r: X = (2,1,0) + h(1,1,1)\,; h \in IR$.

Considerando $t = \frac{1}{4}$, temos $\vec{v}_r \,//\, (1,-1,1)$ e $r: X = (2,1,0) + h(1,-1,1)\,; h \in IR$.

Como vimos o exercício tem duas soluções.

12 . Da figura abaixo sabe – se que:



i) a reta r é perpendicular ao plano α, tem a direção do vetor $\vec{u} = (1,2,-1)$ e $P(1,1,-1)$ pertence à reta r.

ii) os pontos Q e $R(-1,0,1)$ pertecem ao plano α.

iii) S = (0,1,2)

Determine:

a) uma equação do plano α.
b) as coordenadas do ponto Q.
c) uma equação do plano QRS.
d) o ângulo entre os planos QRS e α.

e) a distância entre as retas r e RS.
f) uma equação do plano que contém a reta r e é paralelo à reta $t: X = (3,2,0) + h(2,0,-1); h \in IR$
g) uma equação do plano perpendicular ao plano α que contém a reta QS.

Solução:

a) Como $\vec{n}_{\alpha} // \vec{v}_r = (1,2,-1)$ temos $\alpha: x + 2y - z + d = 0$. Além disso $R(-1,0,1) \in \alpha$, assim d = 2. Logo $\alpha: x + 2y - z + 2 = 0$.

b) As equações paramétricas da reta r são $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \; ; t \in IR \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Como $\{Q\} = r \cap \alpha$ temos:

$$Q(1 + t, 1 + 2t, -1 - t) \text{ e } 1 + t + 2(1 + 2t) - (-1 - t) + 2 = 0.$$

Logo, $t = -1$ e $Q(0,-1,0)$.

c) Os vetores $\overrightarrow{QR} = (-1,1,1)$ e $\overrightarrow{QS} = (0,2,2)$ são LI. Logo, podemos escrever uma equação vetorial do plano QRS como:

$$X = t(-1,1,1) + h(0,2,2); t \text{ e } h \in IR .$$

d) Sabemos que $\vec{n}_{\alpha} = (1,2,-1)$ e $\vec{n}_{QRS} // (-1,1,1) \times (0,2,2) = (0,2,-2)$.
Assim, $\cos(QRS, \alpha) = \dfrac{|6|}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo $(QRS, \alpha) = 30°$.

e) Sabemos que $\vec{v}_r = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{RS} = (0,1,2) - (-1,0,1) = (1,1,1)$ daí,
$[\vec{v}_r, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{QR}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -6$. Assim, as retas r e s são reversas.

$$\text{Logo, } d(r, RS) = \frac{|[\vec{v}_r, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{QR}]|}{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{RS}|} = \frac{6}{|(3,-2,-1)|} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

f) Seja β o plano que queremos determinar. Os vetores $\vec{v}_r = (1,2,-1)$ e $\vec{v}_t = (2,0,-1)$ são LI e têm representantes β , logo uma equação vetorial do plano β é :

$$X = P + \lambda\,(1,2,-1) + \sigma\,(2,0,-1)\,;\ \lambda \text{ e } \sigma \in IR$$

g) Os vetores $\vec{n}_\alpha = (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{QS} = (0,2,2)$ são LI e têm representantes no plano que queremos determinar. Assim uma equação deste plano é :

$$X = S + t\,(1,2,-1) + h\,(0,1,1)\,;\ t \text{ e } h \in IR$$