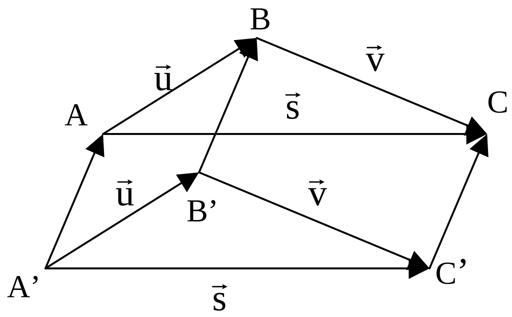
1.5 Adição de vetores

Definição: Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e um ponto qualquer A. Sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. O vetor $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$ é chamado **vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** e indicamos por $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Observemos que o vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ independe do ponto A. De fato, se considerarmos outro ponto A' obteremos $B' = A' + \vec{u}$ e $C' = B' + \vec{v}$.

Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

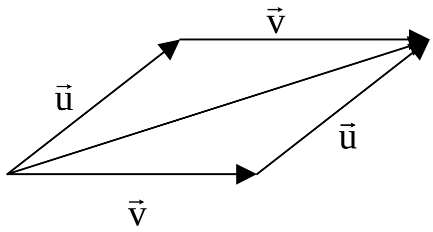


Usando a propriedade 1 de 1.3 , concluímos que :

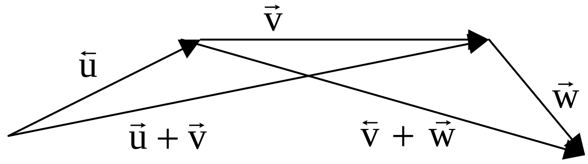
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Daí, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ e portanto $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa).



2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
   (associativa)



3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ (elemento neutro).
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (elemento oposto).

Indicamos o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$ por $\vec{u} - \vec{v}$. Notemos que $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.

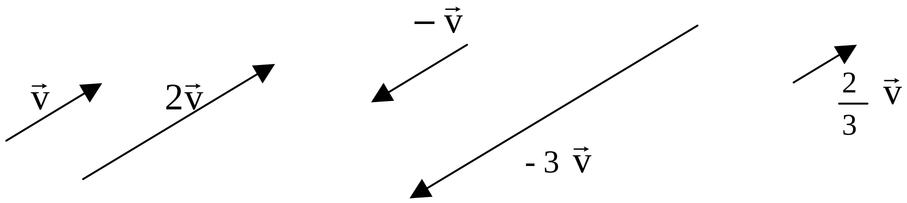
1.6 Produto de um número real por um vetor

Definição: Dados $a \in R^*$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$, chamamos **produto de a por** $\vec{v}$, o vetor $\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{a}\vec{\mathbf{v}}$, que satisfaz às condições abaixo:

1. $|\vec{w}| = |a||\vec{v}|$.
2. A direção de $\vec{w}$ é a mesma da $\vec{v}$.
3. O sentido de $\vec{w}$ é igual ao de $\vec{v}$ se $a > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$ se $a < 0$.

Se $a = 0$ ou $\vec{v} = \vec{o}$, o produto $a\vec{v}$ é o vetor nulo.

Exemplos:



Se $a \neq 0$, o produto $\frac{1}{a}\vec{v}$ é indicado por $\frac{\vec{v}}{a}$. Se $\vec{v} \neq \vec{o}$, é fácil mostrar que $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é o versor de $\vec{v}$, ou seja $\vec{v}° = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e portanto $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{v}°$.

Propriedades:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$.
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
3. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$.
4. $1\vec{v} = \vec{v}$.

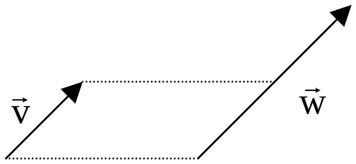
Nas propriedades acima, $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são vetores quaisquer, **a** e **b** são números reais.

1.7 Combinação linear

Definição 1: Dados n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ e n escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chamamos o vetor $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$, de **combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ com coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.**

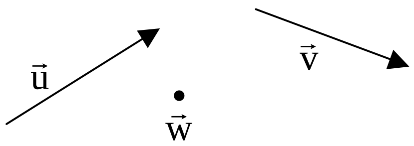
Nos exemplos 1, 2 e 3 a seguir, escrevemos $\vec{w}$ como combinação linear dos vetores dados.

Exemplo 1:



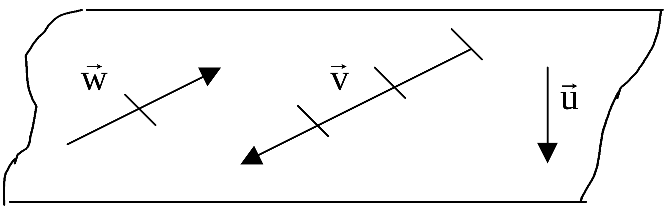
Neste exemplo, $\vec{w} = 2\vec{v}$.

Exemplo 2:



Como $\vec{w} = \vec{o} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, dizemos que $\vec{o}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coeficientes zeros.

Exemplo 3:



Observando a figura ao lado, podemos escrever :

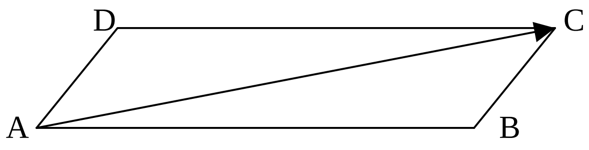
$$\vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{v} + 0\vec{u}.$$

Assim, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coeficientes $-\frac{2}{3}$ e 0.

Note que, o vetor $\vec{u}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\vec{w}$ e $\vec{v}$.

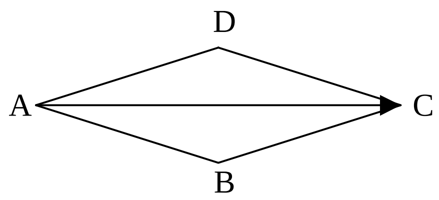
Exemplo 4:

Consideremos um paralelogramo ABCD.

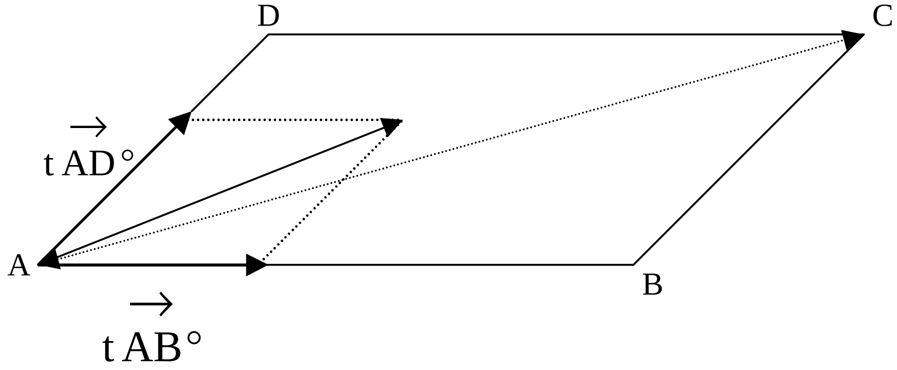


Observemos que o vetor $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ possui a mesma direção que a diagonal AC.

Se $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$, este paralelogramo será um losango. Sabemos que em um losango ABCD, a bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$ contém a diagonal AC. Assim, o vetor $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ possuirá também a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$.

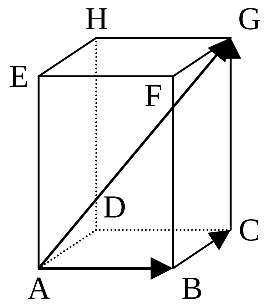


No caso de $|\vec{AB}| \neq |\vec{AD}|$, o vetor $\vec{AC}$ não possui a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$. Para conseguirmos um vetor que possua a mesma direção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$, basta tomarmos o vetor $\vec{v} = t\,\vec{AB}^{\circ} + t\,\vec{AD}^{\circ},\ t \in R^{*}$.



Exemplo 5:

Observando o paralelepípedo ao lado, podemos escrever:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$$

Dizemos então que $\overrightarrow{AG}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, podemos também escrever:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Assim, podemos também dizer que $\overrightarrow{AG}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.

Definição 2: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são **colineares (paralelos)**, se possuem representantes em uma mesma reta. Neste caso indicamos $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \vec{v}_3, ..., // \vec{v}_n$.

No exemplo 1, temos $\vec{u} // \vec{w}$, e no exemplo 2 temos $\vec{w} // \vec{u}$ e $\vec{w} // \vec{v}$, embora $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$ não sejam paralelos.

Definição 3: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são **coplanares**, se possuem representantes em um mesmo plano.

Observamos que a colinearidade de vetores é um caso particular da coplanaridade de vetores.

Nos exemplos de 1 a 4, os vetores envolvidos são coplanares.

Propriedades:

1. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear do outro.

Prova: "$\Rightarrow$" Começaremos considerando os seguintes casos:

1) $\vec{u} = \vec{o} = \vec{v}$; $\vec{u} = t\vec{v}$, $t \in IR$
2) $\vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$; temos $\vec{u} = 0\vec{v}$