3. $\vec{u} \neq \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$. Como $\vec{u} // \vec{v}$, temos $\vec{u}^{\,o} = \pm\, \vec{v}^{\,o}$. Daí, $|\vec{u}|\,\vec{u}^{\,o} = \pm |\vec{u}| \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ou seja, $\vec{u} = \pm \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido podemos escrever $\vec{u} = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$. E se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários temos $\vec{u} = -\dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$.

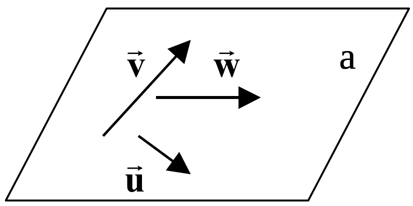
Por outro lado, suponhamos que podemos escrever $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} = t\,\vec{v}$. Pela definição de produto de um número real por vetor, temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, logo são paralelos.

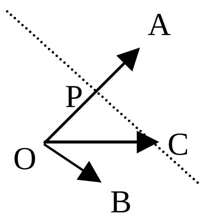
2. Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear dos outros.

Prova: Suponhamos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, temos então os seguintes casos:

1) Um deles sendo o vetor nulo, digamos $\vec{u} = \vec{o}$.
   Podemos escrever: $\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$.
2) Dois deles são paralelos, digamos $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$.
   Podemos escrever: $\vec{u} = m\vec{v} = m\vec{v} + 0\vec{w}$, $m \in IR$.
3) Quaisquer dois desses vetores não paralelos.

Vamos considerar a figura ao lado, onde *a* é um plano que contém representantes dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.





Tomemos $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. Tracemos pelo ponto C uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$, que intercepta a reta OA no ponto P. Assim podemos escrever: $\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$.

Como $\overrightarrow{OP} // \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{PC} // \overrightarrow{OB}$ temos: $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $m,n \in IR$.

Por outro lado, suponhamos que $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $n, m \in IR$. Assim, pela definição de adição de vetores, temos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

1.8 Dependência linear

Definição 1: Dizemos que um vetor $\vec{v}$ é **linearmente dependente**, se $\vec{v} = \vec{o}$.

Definição 2: Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **linearmente dependentes** se eles são paralelos.

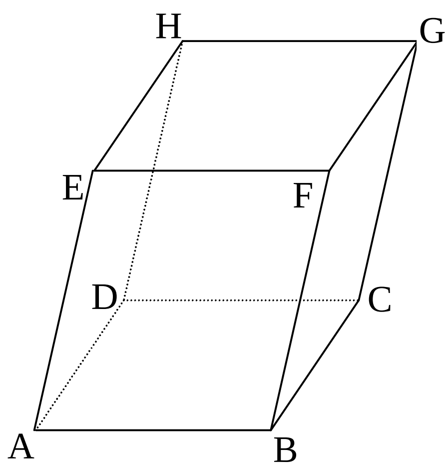
Definição 3: Dizemos que três vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são **linearmente dependentes** se eles são coplanares.

Definição 4: Dizemos que mais de três vetores do espaço (**IR^3**), são sempre **linearmente dependentes.**

Quando os vetores do espaço não são **linearmente dependentes** (LD), dizemos que eles são **linearmente independentes** (LI).

Exemplos:

Considerando o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE, temos:



1) $\overrightarrow{AB}$ é LI. 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ é LD.

3) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são LI.

4) $\overrightarrow{AB}$ e $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ são LD.

5) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são LI..

6) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são LD.

7) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{FF}$ são LD.

8) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$ $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AG}$ são LD.

Propriedades:

1. Se um vetor $\vec{v}$ é LI, então dado $\vec{u} // \vec{v}$, temos que existe um único escalar m tal que $\vec{u} = m\vec{v}$.

Prova: Como $\vec{v}$ é LI, temos pela prova da propriedade 1 de 1.7, que $\vec{u} = m\vec{v}$ e m é único.

2. Se dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI, então dado $\vec{v}$ coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos que existe um único par de escalares (m, n), tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + nv_2$.

Prova: Como $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares e, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI, temos pela prova da propriedade 2 de 1.7, que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$.

Para mostrar que esses escalares são únicos, vamos supor que existam m'e n', tais que : $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2$. Então $(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 = \vec{o}$. Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever $\vec{v}_1 = -\dfrac{(n - n')}{(m - m')}\vec{v}_2$. Daí, $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, o que contradiz o fato de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ serem LI. Logo, $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

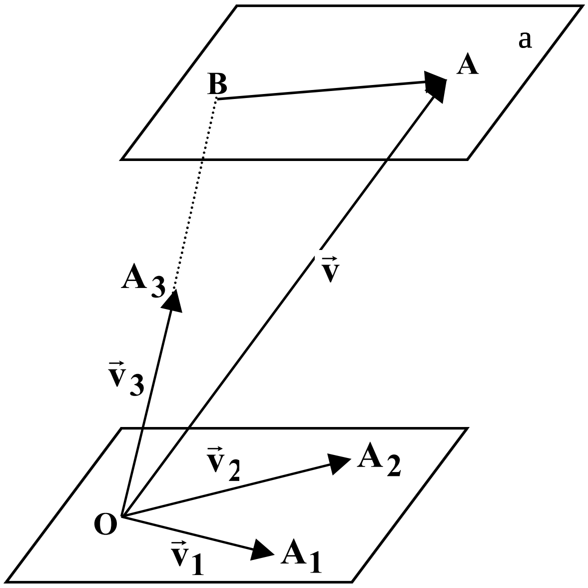
Analogamente podemos mostrar que $n = n'$.

3. Se três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, então dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, temos que existe único terno de escalares (m, n, p), tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + nv_2 + p\vec{v}_3$.

Prova: Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, temos então os seguintes casos:

1) $\vec{v} = \vec{o}$. Podemos escrever: $\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
2) $\vec{v}$ paralelo a um dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, digamos $\vec{v} // \vec{v}_1$. Então podemos escrever: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
3) $\vec{v}$ coplanar com dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, digamos $\vec{v}, \vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares. Assim temos: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.

4) $\vec{v}$ não é coplanar com quaisquer dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Vamos considerar a figura a seguir, onde α é o plano paralelo ao plano OA_1A_2 passando pelo ponto A. Seja B é o ponto de interseção da reta OA_3 com o plano α.



Temos então:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}.$$

Como $\overrightarrow{OB} \,//\, \vec{v}_3$ e $\overrightarrow{BA}$ é coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos:

$$\overrightarrow{OB} = p\vec{v}_3,\ \overrightarrow{BA} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2.$$

Logo $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$.

Para mostrarmos que esses escalares são únicos, vamos supor que $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2 + p'\vec{v}_3$. Então temos:

$$(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 + (p - p')\vec{v}_3 = \vec{o}.$$

Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever:

$$\vec{v}_1 = -\frac{n - n'}{m - m'}\,\vec{v}_2 - \frac{p - p'}{m - m'}\,\vec{v}_3\ ,$$

ou seja, $\vec{v}_1$ é coplanar com $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. O que contradiz o fato de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ serem LI. Logo $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

Analogamente podemos mostrar que $\mathbf{n = n¢}$ **e** $\mathbf{p = p¢}$.

1.9 Base – Coordenadas de vetor

Definição 1: Dado um vetor $\vec{v}$ LI, dizemos que $\{\vec{v}\}$ é uma **base para o conjunto de vetores paralelos a** $\vec{v}$.

Definição 2: Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ **é uma base para o conjunto de vetores coplanares com** $\vec{v}_1$ **e** $\vec{v}_2$

Definição 3: Dados três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ **é uma base para o conjunto de vetores do espaço** (**IR^3**).

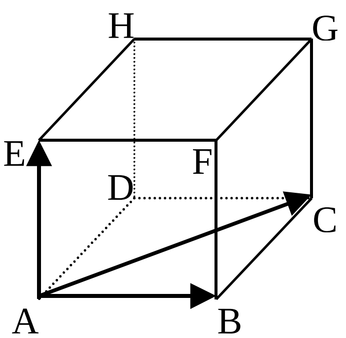
Definição 4: Dizemos que uma **base é ortogonal**, quando seus vetores são dois a dois ortogonais.

Definição 5: Dizemos que uma **base é ortonormal**, se ela for ortogonal e seus vetores unitários.

Costumamos representar uma base ortonormal por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Fixada uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do espaço, pela propriedade 3 de 1.8, para todo vetor $\vec{v}$, temos $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$, onde m, n e p são únicos. Dizemos que **$m\vec{v}_1, n\vec{v}_2$ e $p\vec{v}_3$** são as **componentes de $\vec{v}$ na direção dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$**, respectivamente. Os escalares **m, n** e **p** são **as coordenadas de $\vec{v}$** em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.
Geralmente, representamos o vetor $\vec{v}$ através de suas coordenadas, ou seja, $\vec{v} = (m, n, p)$.

Exemplo 1:



Consideremos o cubo ao lado e fixemos a base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\}$. Podemos escrever:

1. $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{AE}$, daí $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$.
Analogamente, $\overrightarrow{AC} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{AE} = (0,0,1)$.

Podemos concluir então que, dada uma base qualquer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, as coordenadas desses vetores em relação a esta base são:

$$\vec{v}_1 = (1,0,0), \quad \vec{v}_2 = (0,1,0) \text{ e } \vec{v}_3 = (0,0,1).$$

2. $\overrightarrow{AF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AE}$, daí $\overrightarrow{AF} = (1,0,1)$.

Observamos que se a base considerada for $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\}$, temos $\overrightarrow{AF} = (1,1,0)$.

3. $\overrightarrow{AG} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AE}$, daí $\overrightarrow{AG} = (0,1,1)$.

Exemplo 2:

Consideremos $\vec{v} = (-1,1,1)$ em relação base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\}$ do exemplo anterior. Assim, $\vec{v} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH}$.

Analogamente ao que foi feito para o conjunto dos vetores no espaço, podemos fazer para conjuntos de vetores coplanares e colineares. Assim, um vetor num conjunto de vetores coplanares tem duas coordenadas e um vetor num conjunto de vetores colineares tem uma coordenada.

Propriedades:

Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base do espaço. Consideremos os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, representados através de suas coordenadas em relação a esta base.

1. Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $t \in IR$ então:

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$.

c) $t\,\vec{u} = (t\,a_1, t\,a_2, t\,a_3)$.

Prova: a) Como $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ e $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$, temos:

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + (a_3 - b_3)\vec{v}_3 = \vec{o}$$

Daí, $$\vec{o} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\ .$$

Logo, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$ e $a_3 - b_3 = 0$.

De maneira análoga podemos mostrar os itens b) e c).

Observamos que os vetores $\vec{u} = (0, 0, 0)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são LD, visto que o vetor nulo é paralelo a todo vetor do espaço.

2. Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores não nulos. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existe um $t \in IR$ tal que :

$$\begin{aligned} a_1 &= t\,b_1 \\ a_2 &= t\,b_2 \\ a_3 &= t\,b_3 \end{aligned}$$

Prova: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$. Como $\vec{v}$ é LI, podemos escrever: $\vec{u} = t\,\vec{v}$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_1 &= t\,b_1 \\ a_2 &= t\,b_2 \\ a_3 &= t\,b_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, se existe $t \in IR$, tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= t\,b_1 \\ a_2 &= t\,b_2 \\ a_3 &= t\,b_3 \end{aligned}$$

então $\vec{u} = t\,\vec{v}$. Logo $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ e portanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

3. Três vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ são LD se, e somente se,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta propriedades pode ser demonstrada através de propriedades de determinantes.

Concluímos que se t não existe na propriedade 2, ou se Δ é diferente de zero, na propriedade 3, temos que os vetores considerados nessas propriedades são LI.