1.10 Sistemas de coordenadas cartesianas

Definição 1: Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço é um conjunto formado por um ponto O e uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Indicamos um sistema de coordenadas cartesianas no espaço por $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

O ponto O é chamado **origem do sistema** e os eixos que passam por O e tem as direções de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, respectivamente, são chamados de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e seja P um ponto arbitrário do espaço. Chamamos **coordenadas do ponto P em relação ao sistema $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$**, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, ou seja, se $\overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$, então $P(a_1, a_2, a_3)$. Os números a_1, a_2, a_3 são denominados **abscissa, ordenada e cota do ponto P**, respectivamente.

Exemplo 1:

Na figura ao lado, temos:

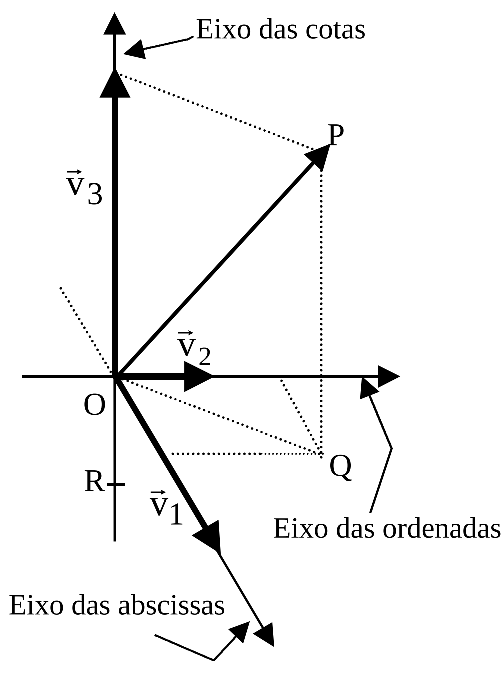
1. $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$,

ou seja, $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e daí, $P\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$.

2. $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$, daí, $Q\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$.

3. $\overrightarrow{OR} = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right)$, daí, $R = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right)$.

4. $\overrightarrow{OO} = (0,0,0)$, daí $O(0,0,0)$.



Propriedades:

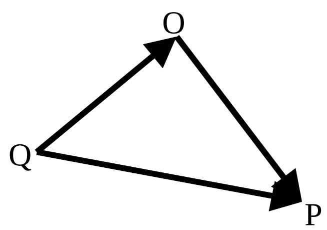
Fixado um sistema de coordenadas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e dados $\vec{v} = (a, b, c)$, $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, temos as seguintes propriedades:

1. $\overrightarrow{QP} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

2. $P + \vec{v} = A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.

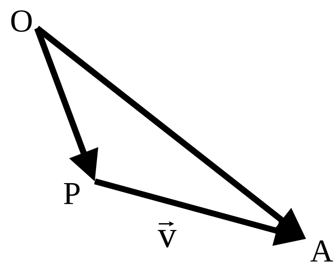
3. O ponto médio de PQ é o ponto $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Prova:

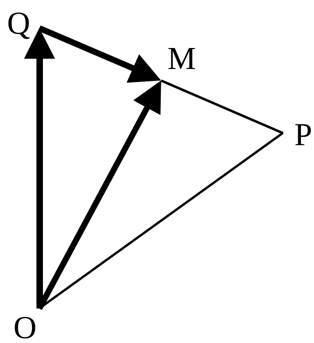


1. Para demonstrarmos esta propriedade, escrevemos o vetor $\overrightarrow{QP}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OP}$, ou seja,

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = (-x_2, -y_2, -z_2) + (x_1, y_1, z_1) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$



2. Utilizando a definição de soma de um ponto com um vetor, temos que $\overrightarrow{PA} = \vec{v}$. Assim, o vetor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$. Logo, $A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.



3. Podemos demonstrar a propriedade 3 escrevendo $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OQ} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QP}$.

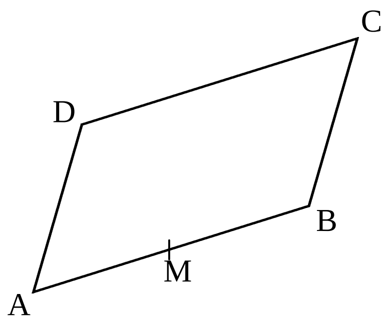
Representando os vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ através de suas coordenadas, obtemos:

$$\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Logo, $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Exemplo 2:

Consideremos o paralelogramo ABCD, onde $A(1,0,2)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,2,-2)$. Desejamos determinar as coordenadas dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, do vértice D e do ponto médio de AB.



Aplicando as propriedades anteriores temos:

$\vec{AB} = (1-1, -1-0, 2-2) = (0,-1,0)$,

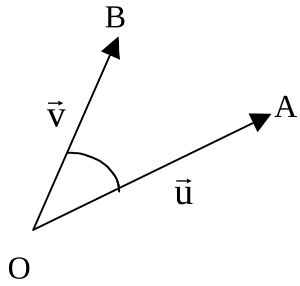
$\vec{BC} = (-1,3,-4)$,

$D = A + \vec{AD} = A + \vec{BC} = (0,3,-2)$ e o ponto médio de AB é $M(1, -1/2, 2)$.

CAPÍTULO II – PRODUTOS

2.1 Produto escalar

Definição 1: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, e escolhido um ponto O qualquer, podemos escrever: $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$**.** Chamamos **ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** a medida do ângulo $A\hat{O}B$ determinado pelas semi-retas OA e OB.



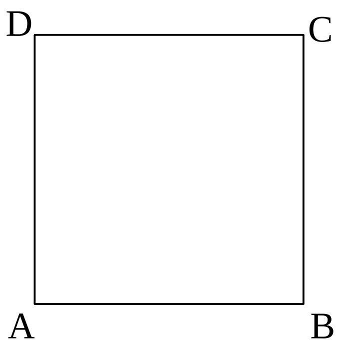
Indicamos $A\hat{O}B = (\vec{u}, \vec{v})$, onde $0 \le (\vec{u}, \vec{v}) \le \pi$.

Observemos que se $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido e se $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, estes vetores têm sentidos contrários.

Definição 2: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. **O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$,** indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})}$**.** Se um dos vetores for nulo temos $\mathbf{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$**.**

Exemplo 1

Considerando o quadrado seguinte, cujo lado mede 2u, temos:

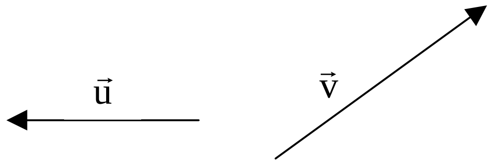


1) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}|\,|\vec{BC}| \cos 90^o = 0.$

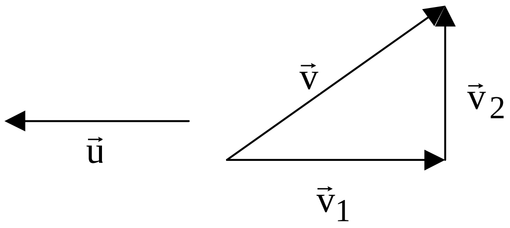
2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}|\,|\vec{AC}| \cos 45^o = 2.2\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4.$

3) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = |\vec{AB}|\,|\vec{CD}| \cos 180^o = -4.$

Definição 3: Sejam $\vec{u}$ um vetor não nulo e $\vec{v}$ um vetor qualquer.



O vetor $\vec{v}$ se exprime de maneira única na forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}_2$ é ortogonal a $\vec{u}$.



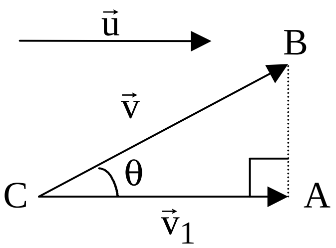
Chamamos o vetor $\vec{v}_1$, **de projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.**

Indicamos $\mathbf{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}_1$.

Interpretação geométrica do produto escalar

Se $\vec{v}$ é um vetor qualquer e $\vec{u}$ um vetor unitário, então $\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$. De fato, como $\vec{v}_1 // \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = t\,\vec{u}$. Basta mostra que $\vec{v}\cdot\vec{u} = t$. Para isso, consideremos os casos a seguir:

(1)

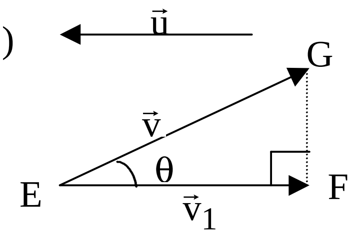


Em (1) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é agudo. Nesse caso, temos t > 0, e daí $|\vec{v}_1| = |t||\vec{u}| = t$. Por outro lado, como o triâmgulo ABC é retângulo em A, podemos escrever:

$$t = |\vec{v}_1| = |\vec{v}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Em (2) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é obtuso. Nesse caso, temos t < 0, e daí $|\vec{v}_1| = |t||\vec{u}| = -t$. Além disso, o ângulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \theta$. Considerando então o triângulo retângulo EFG, temos:

(2)



$$t = -|\vec{v}_1| = -|\vec{v}|\cos\theta = -|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\pi - \theta) = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Se $0 \neq |\vec{u}|$, temos $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}^o}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}^o)\vec{u}^o$. Chamamos $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}^{\mathbf{o}}$, **a medida algébrica da projeção de $\vec{\mathbf{v}}$ na direção de $\vec{\mathbf{u}}$** e indicamos **med alg proj$_{\vec{\mathbf{u}}}$** $\vec{v}$.

Exemplo 2:

Dados $\vec{u} \neq \vec{o}$, $|\vec{v}| = 6$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^o$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}^o = |\vec{v}||\vec{u}^o|\cos 60^o = 6.1.\frac{1}{2} = 3.$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 3\vec{u}^o$.

Exemplo 3:

Dados $\vec{a} \neq \vec{o}$, $|\vec{b}| = 8$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}^\circ = |\vec{b}||\vec{a}^\circ|\cos 120^\circ = 8 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = -4\vec{a}^\circ$

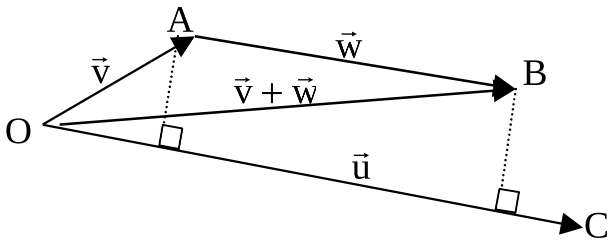
Propriedades do produto escalar

1. $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$.
2. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
3. $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$.
4. $t(\vec{v}.\vec{u}) = (t\,\vec{v}).\vec{u} = \vec{v}(t\,\vec{u})$.
5. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Nas propriedades acima, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores quaisquer, e t é um número real.

As quatro primeiras propriedades decorrem diretamente da definição do produto escalar. Faremos a seguir a prova da propriedade 5.

Se um dos vetores for nulo, a verificação é imediata. Consideremos, na figura ao lado, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos e os pontos O, A, B e C tais que:



$$A = O + \vec{v},\ \ B = A + \vec{w}\ \text{ e }\ C = O + \vec{u}.$$

Inicialmente observamos que:

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = \text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} + \text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{w}.$$

Ou seja, $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u}^{\circ} = \vec{v}.\vec{u}^{\circ} + \vec{w}.\vec{u}^{\circ}$.

Daí, $(\vec{v}+\vec{w}).(|\vec{u}|\vec{u}^{\circ}) = \vec{v}.(|\vec{u}|\vec{u}^{\circ}) + \vec{w}.(|\vec{u}|\vec{u}^{\circ})$.

Então, $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$.

Pela propriedade 1, temos: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Expressão cartesiana do produto escalar

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\,.\,(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\
&= (x_1x_2)\vec{i}\cdot\vec{i} + (x_1y_2)\vec{i}\cdot\vec{j} + (x_1z_2)\vec{i}\cdot\vec{k} + (y_1x_2)\vec{j}\cdot\vec{i} + (y_1y_2)\vec{j}\cdot\vec{j} + (y_1z_2)\vec{j}\cdot\vec{k} + \\
&+ (z_1x_2)\vec{k}\cdot\vec{i} + (z_1y_2)\vec{k}\cdot\vec{j} + (z_1z_2)\vec{k}\cdot\vec{k}
\end{aligned}$$

Como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal, seus vetores satisfazem às relações:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

Assim, a expressão acima se reduz a:

$$\mathbf{\vec{u} \times \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Observamos então que:

1) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}$. Daí, $\mathbf{|\vec{u}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}}$

2) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, ou seja,

$\vec{u}$ ^ $\vec{v}$ Û $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Daqui em diante, o sistema considerado será o ortonormal, exceto quando se explicitar o contrário.

Exemplo 4:

Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,2)$ e $\vec{v} = (2,0,2)$, temos:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 0 + 4 = 6.$

2) $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$

3) $\vec{u}° = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{3}(1,2,2) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right).$

4) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{6}{3.2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, logo, $(\vec{u}, \vec{v}) = 45°.$

5) $\vec{u} \perp \vec{w}$, sendo $\vec{w} = (0,2,-2)$, pois $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$

6) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}°)\vec{u}° = \left[(2,02) \cdot \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\right]\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) =$

$= 2\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

7) $\text{med alg proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 2$.

Cossenos diretores de um vetor

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, chamamos **cossenos diretores de um vetor $\vec{v}$ ¹ $\vec{o}$,** os cossenos dos ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores desta base.

Considerando $\vec{v} = (x, y, z)$, $\alpha = (\vec{v}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{v}, \vec{j})$, e $\gamma = (\vec{v}, \vec{k})$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{v}|} \quad \text{e} \quad \cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}.$$

Como $\vec{v}° = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, segue daí que , $\mathbf{\vec{v}° = (\cos a, \cos b, \cos g)}$.

Daí, $\mathbf{\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1}$.

Chamamos **a** , **b** e **g** **ângulo diretores de $\vec{v}$**.

Exemplo 5:

Dados $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \cos\beta = 0$, $(\vec{v}, \vec{k})$ obtuso e $|\vec{v}| = 5$, temos:

1) $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Logo, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{v}° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.