Instituto de Matemática – UFBA
Disciplina: Geometria Analítica – Mat A01
Última Atualização - 2005

1ª lista - Cônicas

1º) Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da parábola a partir dos elementos dados:
a) foco F (3 , 4) e diretriz d : $x - 1 = 0$;
b) foco F (-1 , 1) e vértice V (0 , 0) ;
c) vértice V (1 , 2) , eixo focal paralelo a Ox e P (-1 , 6) é um ponto de seu gráfico;
d) eixo focal paralelo a Oy e os pontos P (0 , 0), Q (1 , -3) e R (-4 , -8) pertencem ao sue gráfico;
e) eixo focal e.f : $y - 5 = 0$, diretriz d : $x - 3 = 0$ e vértice sobre a reta r : $y = 2x + 3$;
f) vértice V (1 , 1) e foco F (0 , 2);
g) eixo focal Oy e o ponto L (2 , 2) é uma das extremidades do latus rectum.

2º) Dadas as equações das parábolas:
2.1) $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$
2.2) $y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0$,
Determine para cada uma delas os seguintes itens:
a) as coordenadas do vértice e do foco;
b) as equações da diretriz e do eixo focal;
c) o comprimento do latus rectum.

3º) Uma parábola P tem equação $y'^2 = -8x'$ em relação ao sistema x'Oy' indicado na figura 1.
Determine:
a) o esboço gráfico de P;
b) as coordenadas do foco e a equação da diretriz de P em relação ao sistema x'oy';
c) uma equação de P, em relação ao sistema xOy.

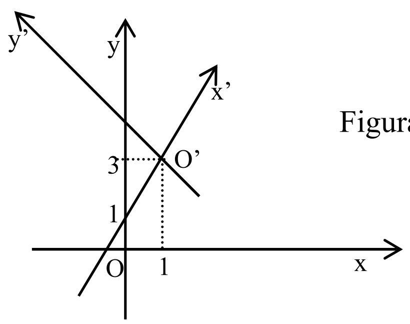

Figura 1

4º) Identifique o lugar geométrico de um ponto que se desloca de modo que a sua distância ao ponto P (-2 , 3) é igual à sua distância à reta r : $x + 6 = 0$. Em seguida determine uma equação desse lugar geométrico.

5º) Determine o comprimento da corda focal da parábola $x^2 + 8y = 0$ que é paralela à reta r : $3x + 4y - 7 = 0$.

6^0) Um cometa se desloca numa órbita parabólica tendo o Sol como o foco. Quando o cometa está a 4 x 10^7 km do sol (figura 2), a reta que os une forma um ângulo de 60^0 com o eixo da órbita. Determine a menor distância que o cometa se encontra do Sol.

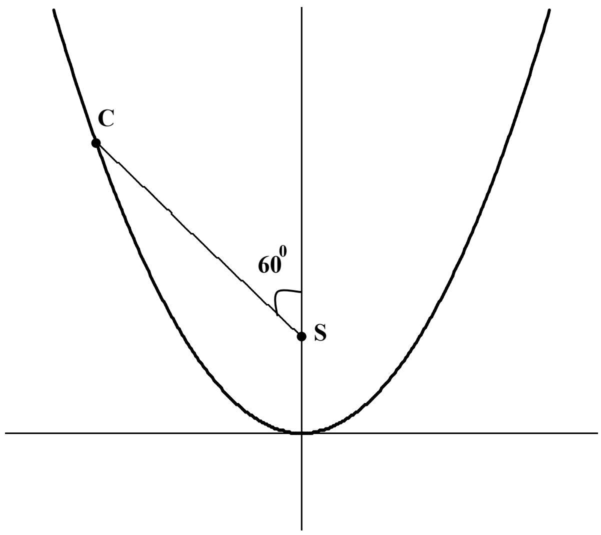

Figura 2

7^0) Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da elipse, a partir dos elementos dados:

a) focos $F_1(3,8)$ e $F_2(3,2)$, e comprimento do eixo maior 10;
b) vértices $V_1(5,-1)$ e $V_2(-3,-1)$, e excentricidade $e = 3/4$;
c) centro $C(-1,-1)$, vértice $V(5,-1)$ e excentricidade $e = 2/3$;
d) centro $C(1,2)$, foco $F(6,2)$ e $P(4,6)$ é um ponto da elipse;
e) focos $F_1(-4,-2)$ e $F_2(-4,-6)$, e med(LR) = 6;
f) vértice $V(3,-3)$ e extremos do eixo menor $B_1(2,2)$ e $B_2(-2,-2)$;
g) o centro sobre a reta r: $y = 2$, foco $F(3,4)$, excentricidade $e = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e os seus eixos são paralelos aos eixos coordenados.

8^0) Dadas as equações das elipses:

8.1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$
8.2) $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$

determine para cada uma os seguintes itens:

a) as coordenadas dos vértices e focos;
b) a excentricidade e o comprimento do latus rectum;
c) as equações dos eixos focal e normal;
d) comprimentos dos eixos maior e menor.

9^0) Um ponto $P(x,y)$ se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos $A(3,1)$ e $B(-5,1)$ é 10. Diga qual a curva descrita por P e em seguida determine sua equação.

10^0) Determine o comprimento dos raios focais do ponto $P(3,7/4)$ sobre a elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

11^0) Determine uma equação da cônica com centro na reta r: $x - 3 = 0$, eixo focal paralelo ao eixo Ox, um dos vértices V(7,0) e e = ½.

12^0) Em cada um dos itens, determine uma equação da hipérbole a partir dos elementos dados:

a) focos $F_1(-1,3)$ e $F_2(-7,3)$, e comprimento do eixo transverso igual a 4;
b) vértices $V_1(5,4)$ e $V_2(1,4)$ e comprimento do latus rectum igual a 5;
c) focos $F_1(2,13)$ e $F_2(2,-13)$ e comprimento do eixo conjugado igual a 24;
d) centro C(0,0), um dos focos F(4,4) e um dos vértices $V(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$;
e) assíntotas r: $4x + y - 11 = 0$ e s: $4x - y - 13 = 0$, e um dos vértices V(3,1);
f) um dos focos $F(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, eixo normal: $y = -x$ e excentricidade e = 3/2;
g) eixo normal: y = 2, uma das assíntotas r: $2x - y - 4 = 0$ e comprimento do latus rectum igual a 3.

13^0) Dada a equação $xy - 3x + 4y - 13 = 0$, identifique a cônica e determine as coordenadas dos vértices e focos, as equações dos eixos focal e normal, a excentricidade e o comprimento do latus rectum.

14^0) Uma hipérbole em relação ao sistema x'Oy' (figura 3) tem equação $\dfrac{(x'-2)^2}{4} - \dfrac{y'}{4} = 1$.

Determine, em relação ao sistema xOy:

a) as coordenadas dos vértices e focos;
b) as equações das assíntotas;
c) a sua equação.

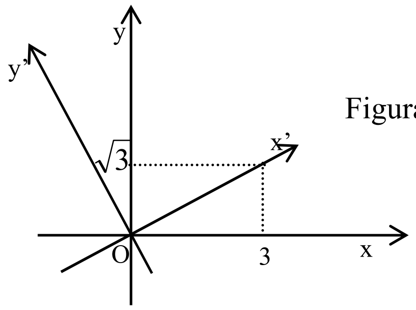

Figura 3

15^0) Determine o lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que o módulo da diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6,-4)$ e $P_2(2, -4)$ é igual a 6.

16^0) Escreva uma equação da hipérbole conjugada da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Determine, para cada curva, as coordenadas dos focos e as equações das assíntotas.

17^0) Determine uma equação da hipérbole eqüilátera de focos nos pontos $F_1(1,6)$ e $F_2(1,-2)$.

18^0) Determine uma equação da elipse , com excentricidade e = 1/3 e cujos focos coincidem com os vértices da hipérbole H: $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

19^0) Determine uma equação da parábola cujo vértice coincide com o centro da hipérbole H: $2x^2 - 7y^2 - 4x + 14y - 19 = 0$, e sua diretriz coincide com o eixo focal da elipse

E: $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$.

$20^{\underline{0}}$) Determine uma equação da elipse de excentricidade igual a $\sqrt{3}/2$ e com eixo maior coincidindo com o latus rectum da parábola de equação $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

$21^{\underline{0}}$) Determine e identifique uma equação do lugar geométrico dos pontos do plano cujas abscissas e ordenadas são respectivamente iguais às abscissas e às metades das ordenadas dos pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.

$22^{\underline{0}}$) Considere os pontos A(-1,0) e B(2,0). Determine uma equação do lugar geométrico dos pontos M do plano não pertencentes à reta AB e tais que o ângulo B do triângulo AMB seja sempre o dobro do ângulo A do mesmo triângulo. Esboce a curva.

$23^{\underline{0}}$) Dois vértices de um triângulo são os pontos A (1,0) e B (5,0). Determine uma equação do lugar geométrico do terceiro vértice C, se este se move de tal forma que a diferença entre os comprimentos AC e BC é sempre igual à metade do comprimento do lado AB.

$24^{\underline{0}}$) Um matemático aceitou um cargo numa nova Universidade situada a 6 km da margem retilínea de um rio. O professor deseja construir uma casa que esteja a uma distância à Universidade igual à metade da distância até a margem do rio. Os possíveis locais satisfazendo esta condição pertencem a uma curva. Defina esta curva e determine sua equação em relação a algum sistema à sua escolha.

$25^{\underline{0}}$) Um segmento AB de 12 unidades de comprimento (u.c.), desloca-se de modo que A percorre o eixo Ox e B percorre o eixo Oy. O ponto P(x,y) é interior ao segmento AB e fica situado a 8 u.c. de A . Estabeleça uma equação do lugar geométrico descrito pelo ponto P.

RESPOSTAS

1^0) a) $4(x – 2) = (y – 4)^2$ b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x – 8y = 0$

c) $–8(x – 1) = (y – 2)^2$ d) $– (y – 1) = (x + 1)^2$

e) $–8(x – 1) = (y – 5)^2$ f) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x – 12y + 4 = 0$

g) $4(y – 1) = x^2$ ou $–4(y – 3) = x^2$

2^0) 2.1) a) V(–2,5/2); F(1,5/2) b) diretriz: $x = –5$; eixo focal: $2y – 5 = 0$

c) med (LR) = 12

2.2) a) V(0,0); F(–2, –2) b) diretiz: $y = –x + 4$; eixo focal: $y = x$

3^0) b) (–2,0); diretriz: $x' = 2$

c) P: $4x^2 – 4xy + y^2 + (4 + 8\sqrt{5})x + (16\sqrt{5} –2)y + (1 – 56\sqrt{5}) = 0$

4^0) parábola, $(y – 3)^2 = 8(x + 4)$

5^0) 25/2

6^0) 10^7 km

7^0) a) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$ b) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{7}=1$

c) $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$ d) $\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$

e) $\frac{(x+4)^2}{12}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ f) $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 144 = 0$

g) $(x-3)^2+\frac{(y-2)^2}{5}=1$

8^0) 8.1) a) $V_1(1,3)$; $V_2(-3,3)$; $F_1(-1+\sqrt{3}, 3)$; $F_2(-1-\sqrt{3},3)$

b) $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; med(LR) = 1

c) eixo focal: $y = 3$; eixo normal: $x = -1$

d) med(eixo maior) = 4 u.c.; med(eixo menor) = 2 u.c

8.2) a) $V_1(-2,4)$; $V_2(2,-4)$; $F_1(-\sqrt{3},2\sqrt{3})$; $F_2(\sqrt{3},-2\sqrt{3})$

b) $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; med(LR) = $\sqrt{5}$

c) eixo focal: $y = -2x$; eixo normal: $y = x/2$

d) med(eixo maior) = $4\sqrt{5}$ u.c.; med(eixo menor) = $2\sqrt{5}$ u.c

9^0) elipse, $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

10^0) 7/4 e 25/4

11^0) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

12^0) a) $\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$ b) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{5}=1$

c) $\frac{y^2}{25}-\frac{(x-2)^2}{144}=1$ d) $xy = 8$

e) $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{1/4}=1$ f) $9x^2 + 162xy + 9y^2 - 640 = 0$

g) $\frac{(y-2)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$

13^0) Hipérbole; $F_1(-4-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$; $F_2(-4+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$; $V_1(-3,4)$, $V_2(-5,2)$

eixo focal: $y = x + 7$; eixo normal: $y = -x - 1$, $e = 2/\sqrt{2}$, $\text{med(LR)} = 2\sqrt{2}$

14^0) a) $V_1(2\sqrt{3}, 2)$; $V_2(0,0)$; $F_1\left(\sqrt{3}(1+\sqrt{2}), 1+\sqrt{2}\right)$; $F_2\left(\sqrt{3}(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$

b) r: $(1-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})x - 4 = 0$; s: $(1+\sqrt{3})y + (\sqrt{3}-1)x - 4 = 0$

c) $\dfrac{(\sqrt{3}x + y - 4)^2}{16} - \dfrac{(\sqrt{3}y - x)^2}{16} = 1$

15^0) $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$

16^0) Hipérbole conjugada:

equação: $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$; focos: $F_1(0,5)$ e $F_2(0,-5)$; assíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$ e $y = -\dfrac{4}{3}x$

Hipérbole dada:

focos: $F_1(5,0)$ e $F_2(-5,0)$; assíntotas: as mesmas da hipérbole conjugada

17^0) $(y-2)^2 - (x-1)^2 = 8$

18^0) $\dfrac{(x-2)^2}{128} + \dfrac{(y+1)^2}{144} = 1$

$19^{\underline{0}}$) $(x-1)^2 = 12(y-1)$

$20^{\underline{0}}$) $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(x-5)^2}{4} = 1$

$21^{\underline{0)}}$) $x^2 + 4y^2 = 25$ (elipse)

$22^{\underline{0}}$) Ramo direito da hipérbole $3x^2 - y^2 = 3$, excluindo o vértice.

$23^{\underline{0}}$) $3x^2 - y^2 - 18x + 24 = 0$ (menos o vértice)

$24^{\underline{0}}$) Elipse.
Considerando o sistema xOy, onde o eixo Ox é a margem do rio e a Universidade se encontra no ponto Q (0 , 6) sobre o eixo Oy, a equação da curva é $4x^2 + 3(y-8)^2 = 48$

$25^{\underline{0}}$) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{64} = 1$